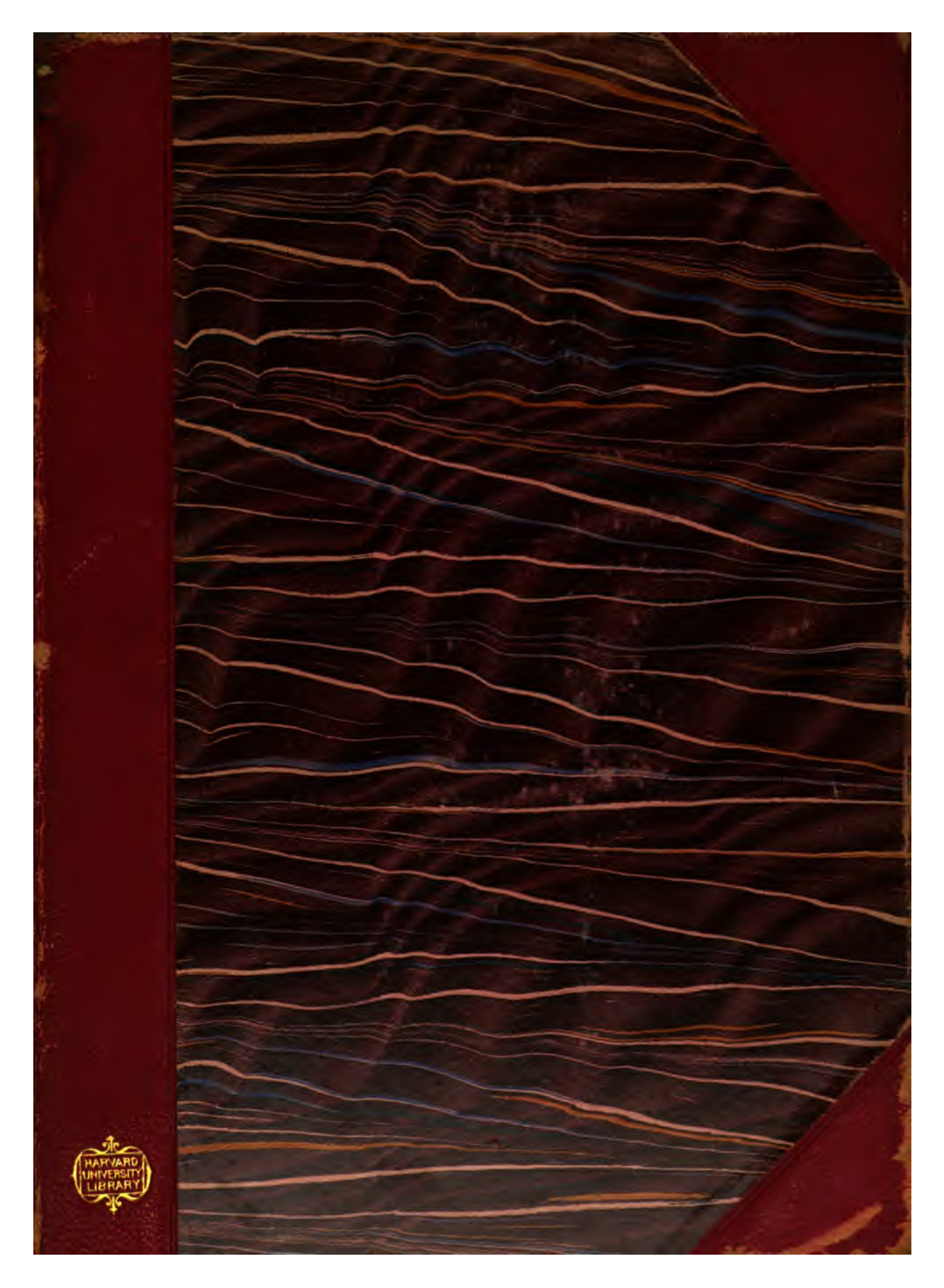
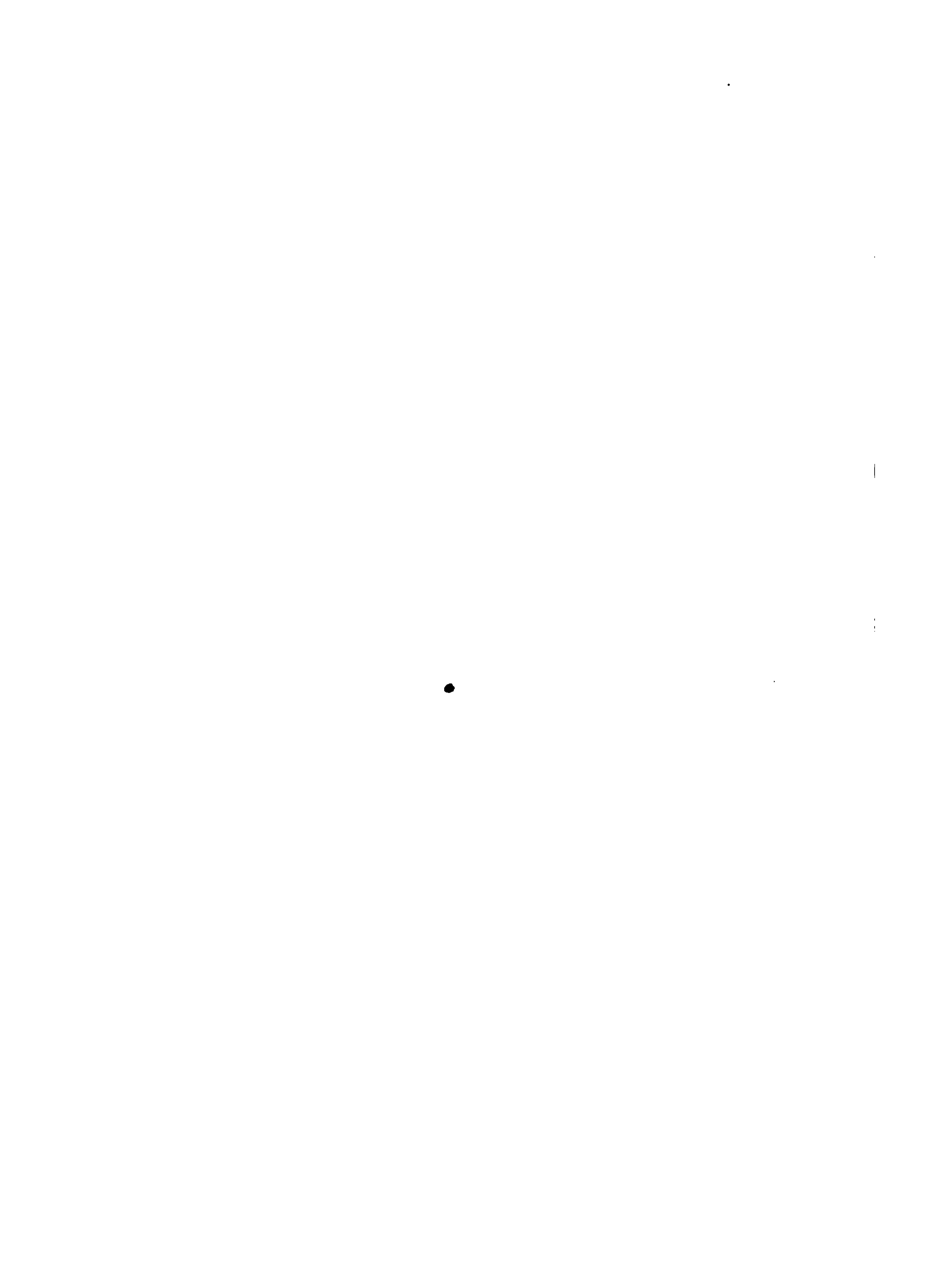
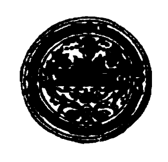

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

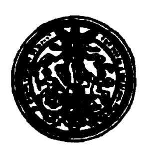




Kleyers



Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Abteilung:

Raumgrössenlehre I.

Lehrbuch

der

ebenen Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

Siebenter Teil:

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben.

Mit 394 Erklärungen und 78 in den Text gedruckten Figuren.

Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten

bearbeitet

nach System Kleyer

von

Prof. Dr. **J. Sachs.**



Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1894.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

Vorwort.

Nachdem durch den vorhergehenden VI. Teil dieses Lehrbuches die Behandlung der Grössen**verhältnisse** in der Geometrie eingeführt worden, gibt der gegenwärtige VII. Teil die Anwendung dieser Betrachtungsweise auf die geradlinigen Figuren. Es bleiben also sämtliche höheren Abschnitte der Kreislehre (deren niedere Teile den Gegenstand des VI. Teiles gebildet hatten) für zusammenfassende Darstellung im folgenden VIII. Teile dieses Lehrbuches vorbehalten. Dadurch ist für beide Bände bessere Uebersicht gewahrt, wenn auch dabei manche Abschnitte im nächsten Teile geringere Schwierigkeiten enthalten, als solche im vorliegenden VII. Teile.

An vielen Stellen wird der Studierende Vorbereitung und Anregung zum Studium der höheren Teile der Geometrie finden, so besonders im 5. und 7. Abschnitte und den zugehörigen Aufgaben — abgesehen von einzelnen Ausblicken auf Trigonometrie, Stereometrie, Geometrie der Lage.

Bei Stellung der Aufgaben wurde besonders darauf Rücksicht genommen, dass dieselben sich eng an den Inhalt der Fragen und Antworten anschliessen, so dass sie gleichsam eine Wiederholung und Erweiterung dieses Textes bilden, und dass auch kein Zusammenfallen mit dem derselben Encyklopädie zugehörigen „Lehrbuch der Konstruktionsaufgaben“ entsteht. — Die Ergebnisse der ungelösten Aufgaben sind wieder mit erhöhter Ausführlichkeit mitgeteilt.

Mehrfache Einzeluntersuchungen, wie z. B. jene über besondere Punkte und Linien am Dreieck an den Figuren 69 und 71, lassen den Wunsch sich aufdrängen, dass eine einheitliche Namen- und Buchstabenbezeichnung der geometrischen Grundelemente allgemein angenommen und eingeführt würde. Nicht genug kann betont werden, welch grosser Vorteil allein aus übersichtlicher Buchstabierung an einer Figur für das Studium derselben entspringt. Damit hängt eng zusammen die Thatsache, dass gerade eine sorgfältige Zeichnung die beste Erleichterung des Verständnisses bietet. Und so wollen auch die Figuren

dieses Lehrbuches nicht nur als Erläuterung des Textes gelten, sondern noch mehr als Anleitung für den Studierenden, solche Figuren womöglich nach dem Wortlaut des Textes selbständig aufzubauen, sie in anderen Lagebeziehungen zu wiederholen (z. B. je für die verschiedenen Arten des Dreiecks oder Vierecks), und so vielleicht etwas langsamer, aber dafür desto sicherer und gründlicher in das Verständnis dieser Wissenschaft einzudringen.

Baden-Baden, im November 1894.

Prof. Dr. **J. Sachs.**

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

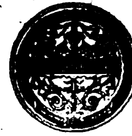
Aufgaben-Sammlung.

1316. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1238. — Seite 1—16.
Mit 4 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; **der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Forts. v. Heft 1238. — Seite 1—16. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben **beigegeben,** welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Ebene Elementar-Geometrie

(Planimetrie).

7. Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1) Ueber die Aehnlichkeit der Dreiecke im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter Aehnlichkeit der Figuren?

Erkl. 1. Während für einzelne Strecken und Winkel früher (im I. und II. Teil dieses Lehrbuches) nachgewiesen wurde, dass solche im einzelnen immer ähnlich sind, so werden im allgemeinen Flächen ähnlich sein, ohne gleich zu sein, wenn nämlich verschiedene Anzahlen von Flächenelementen je in denselben Formen aneinander gelagert sind. Tritt zur Gleichheit der Formen auch noch die Gleichheit der Mengen hinzu, so wird die Aehnlichkeit zur Kongruenz: kongruente Figuren sind gleich und ähnlich.

Erkl. 2. Dass die Winkelgrössen selbst gleich sein müssen, und nicht nur deren Verhältnisse, folgt aus der Zusammensetzung einer Figur aus ihren absoluten Einheiten. Diese letzteren müssen gleich sein in Bezug auf Seiten und Winkel. Und bei übereinstimmender Aneinanderlagerung von verschiedenen Anzahlen solcher Elemente bleiben die Winkelgrössen dieselben, nur die Längenverhältnisse wechseln.

Erkl. 3. Das Zeichen für die Aehnlichkeit ist ein liegendes S in der Form $\sim$ (oder wohl besser $\backsim$), als Abkürzung für das lateinische Wort similis = ähnlich. Kommt zur Aehnlichkeit die Gleichheit hinzu, so entsteht das Zeichen $\cong$ für die Kongruenz.

Antwort. Unter Aehnlichkeit der Figuren versteht man die Uebereinstimmung derselben in Bezug auf ihre Formen oder Gestalten, nicht aber in Bezug auf ihre Ausdehnung, Grössen oder Flächeninhalte, also die Uebereinstimmung in Bezug auf die Art und Weise der Nebeneinanderlagerung, nicht aber in Bezug auf die Mengen ihrer absoluten Einheiten.

Diese Uebereinstimmung der Formen tritt ein, wenn 1) die entsprechenden Winkel der Figuren gleichgross sind, und 2) die entsprechenden Längengrössen der Figuren im gleichen Grössenverhältnis stehen, d. h. die Aehnlichkeit der Figuren ist bedingt durch Gleichheit der Winkel und der Streckenverhältnisse.

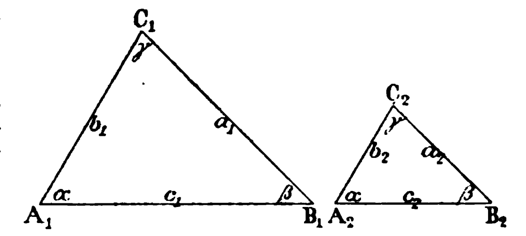
Frage 2. Welche Eigenschaften müssen demnach ähnliche Dreiecke haben?

Antwort. In ähnlichen Dreiecken müssen nach vorigem die drei Winkel

entsprechend gleich sein, und die entsprechenden Seitenstrecken im gleichen Verhältnis stehen, oder:

Satz 1. In ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Winkel gleich und die entsprechenden Seiten proportional.

Figur 1.



Erkl. 4. Statt zu sagen: Mehrere Grössen stehen im gleichen Verhältnis, kann man auch sagen, diese Grössen seien p r o p o r t i o n a l; darunter versteht man: das V e r h ä l t n i s einer ersten Grösse zu i h r e r entsprechenden ist dasselbe, wie das einer bestimmten zweiten Grösse zu i h r e r entsprechenden, und wie das einer bestimmten dritten Grösse zu i h r e r entsprechenden u. s. w. — oder in anderer Ausdrucksweise: die f o r t l a u f e n d e P r o p o r t i o n der ersten, zweiten, dritten ⋯ Grösse ist dieselbe Proportion oder ist gleich der f o r t l a u f e n d e n P r o p o r t i o n der entsprechenden ersten, zweiten, dritten ⋯ Grösse.

Erkl. 5. Sollen die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in Figur 1 ähnlich sein, so müssen nach nebenstehender Antwort die Beziehungen stattfinden:

1) $\sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle C_2A_2B_2 = \alpha$
2) $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta$
3) $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_2C_2A_2 = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \\ 5)\ b_1 : c_1 = b_2 : c_2 \\ 6)\ c_1 : a_1 = c_2 : a_2 \end{array}\right\} a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \\ 5)\ b_1 : b_2 = c_1 : c_2 \\ 6)\ c_1 : c_2 = a_1 : a_2 \end{array}\right\} a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$$

oder indem der gemeinsame Wert dieser drei Verhältnisse mit x bezeichnet wird:

4) $a_1 = x \cdot a_2$
5) $b_1 = x \cdot b_2$
6) $c_1 = x \cdot c_2$.

Erkl. 6. Es ist ausdrücklich zu betonen, dass die e n t s p r e c h e n d e n Winkel gleich bezw. Seiten proportional sein müssen, denn nicht die Gleichheit b e l i e b i g g e l e g e n e r Winkel und Streckenverhältnisse bedingt die Aehnlichkeit, sondern diese Winkel und Seiten müssen in beiden Dreiecken d i e s e l b e g e g e n s e i t i g e L a g e haben. Es entsprechen also einander solche Seiten bezw. Winkel, welche den gleichgrossen Winkeln jedesmal g e g e n ü b e r l i e g e n, oder welche den Scheitel zweier entsprechend gleichen Winkel v e r b i n d e n und umgekehrt, z. B. entspricht Hypotenuse der Hypotenuse, kleinere Kathete der kleineren Kathete, Dreiecksbasis der Dreiecksbasis, Winkel an der Spitze dem Winkel an der Spitze u. s. w. (vergleiche das Beispiel in Erkl. 35 und Figur 4).

Frage 3. Sind umgekehrt die sechs in Satz 1 ausgesprochenen (und in Erkl. 5 angeschriebenen) Bedingungen der Aehnlichkeit zweier Dreiecke von einander u n a b h ä n g i g?

Antwort. Die sechs Bedingungen der Erkl. 5 sind keineswegs von einander unabhängig. Denn nimmt man die erste Gruppe für sich, so ist sofort erkennbar, dass wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$, dann sicher auch $\gamma_1 = \gamma_2$ sein muss. Es wird also jede dieser sechs Gleichungen durch die beiden anderen bedingt.

Nimmt man die zweite Gruppe für sich, so ist ebenfalls ohne weitere Beweisführung erkennbar, dass je die eine Gleichung aus den beiden anderen als selbstverständlich sich ergibt.

Aber auch von den so übrigbleibenden vier Gleichungen sind nicht alle unabhängig, sondern es g e n ü g t s c h o n d i e A n n a h m e v o n z w e i in denselben auf-

Erkl. 7. Man beachte schon hier den Zusammenhang zwischen Aehnlichkeit und Kongruenz der Dreiecke. Sind Dreiecke kongruent, so ist:

1) $a_1 = a_2$ 2) $b_1 = b_2$ 3) $c_1 = c_2$,
4) $\alpha_1 = \alpha_2$ 5) $\beta_1 = \beta_2$ 6) $\gamma_1 = \gamma_2$;

aber umgekehrt brauchen von diesen sechs Gleichungen nur passende drei gleichzeitig bekannt zu sein, um die Kongruenz der Dreiecke herbeizuführen. So wird sich zeigen, dass auch zur Herbeiführung der Aehnlichkeit nicht alle sechs Bedingungen bekannt sein müssen, sondern dass sogar nur z w e i passend gewählte derselben genügen, um die Aehnlichkeit zu beweisen.

Erkl. 8. Eine weitere Uebereinstimmung zwischen der Lehre von der Kongruenz und der Aehnlichkeit findet sich in der Ableitung der beiderseitigen Sätze aus eindeutigen Konstruktionen von Dreiecken [vergl. Abschnitt C, 1 e) des III. Teiles].

tretenden Bestimmungsgleichungen, nämlich zwischen Winkelgrössen oder Seitenverhältnissen, um eine Reihe ähnlicher Dreiecke zu konstruieren.

Frage 4. Wie lassen sich die drei Winkelgrössen und Seitenverhältnisse des Dreiecks zu je zweien anordnen?

Erkl. 9. Ist gegeben:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \text{ oder } a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$
$$\text{und } \underline{b_1 : c_1 = b_2 : c_2} \qquad \underline{b_1 : b_2 = c_1 : c_2,}$$

so folgt durch gliedweise Multiplikation bezw. durch Gleichsetzung von Gleichem:

$$a_1 b_1 : b_1 c_1 = a_2 b_2 : b_2 c_2$$

oder durch Kürzung mit b_1 und b_2, wie rechts unmittelbar:

$$a_1 : c_1 = a_2 : c_2 \text{ oder } a_1 : a_2 = c_1 : c_2.$$

Und ebenso ensteht jede der beiden ersten Gleichungen als Produkt der andern mit der letztern dritten.

Erkl. 10. Die vier in Antwort 3 übrig gebliebenen Bestimmungsstücke waren zwei Winkelgrössen und zwei Seitenverhältnisse. Von diesen liefert jedes Paar für sich allein den ersten und vierten der nebenstehenden Fälle. Die gemischte Zusammenstellung von einer Winkelgrösse mit einem Seitenverhältnis zerfällt in die beiden Gruppen zwei und drei.

Antwort. Aus den drei Seitenverhältnissen und den drei Winkelgrössen lassen sich analog den vier Kongruenzsätzen folgende vier unabhängige Zusammenstellungen bilden:

1) Das Verhältnis einer Seite zu einer zweiten und zur dritten, also das Verhältnis der drei Seiten untereinander.

2) Das Verhältnis einer Seite zu einer andern und die Grösse des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels.

3) Das Verhältnis einer Seite zu einer andern und die Grösse des der grösseren von diesen beiden gegenüberliegenden Winkels.

4) Die Grösse von zwei (also allen drei) Winkeln.

Frage 5. Wie entstehen Dreiecke, von welchen das Verhältnis der drei Seiten $(a : b : c)$ gegeben ist, und in welcher Beziehung zu einander stehen solche Dreiecke?

Erkl. 11. Die Konstruktion der zwei Seiten a_1 und b_1, nachdem die Seite c_1 beliebig gewählt worden, geschieht nach Antwort der Frage 29 im VI. Teile. Man findet aus der gegebenen Proportion $a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c$ erst a_1 als vierte Proportionale der Einzelproportion $c : a = c_1 : a_1$, dann b_1 als vierte Proportionale der Einzelproportion $c : b = c_1 : b_1$. Denn in jeder dieser Proportionen sind alle Grössen bis auf die vierte bekannt. — Ganz dasselbe gilt von der Aufsuchung der Grössen a_2, b_2, nachdem c_2 willkürlich gewählt ist.

Erkl. 12. Nach Satz 2 und 3 des VI. Teiles gelten für die Schenkelabschnitte eines von Parallelen geschnittenen Winkels die Aussagen:

Die Schenkelabschnitte vom Scheitel bis je zur gleichen Parallelen stehen auf beiden Schen-

Antwort. 1) Ist nur das Verhältnis der drei Seiten, aber nicht deren Grösse selbst gegeben, so kann man für eine der Seiten, z. B. c eine beliebige Länge c_1 nehmen, danach erst die zwei anderen Seiten a_1 und b_1 nach Massgabe des vorgeschriebenen Verhältnisses konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen drei Strecken $a_1 b_1 c_1$ das einzige Dreieck konstruieren mit der Seite c_1 und dem Seitenverhältnis:

$$a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c.$$

2) Wählt man für die Seite c eine andere beliebige Länge c_2, so kann man wiederum nach Massgabe des gegebenen Verhältnisses die zwei anderen Seiten a_2 und b_2 konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen drei Strecken $a_2 b_2 c_2$

keln im gleichen Verhältnis, und die Schenkelabschnitte vom Scheitel bis zu verschiedenen Parallelstrecken verhalten sich wie diese Parallelstrecken, also einzeln:

$$A_1B' : A_1B_1 = A_1C' : A_1C_1$$

und

$$A_1B' : A_1B_1 = B'C' : B_1C_1$$

oder in fortlaufender Proportion:

$$A_1B' : B'C' : C'A_1 = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1.$$

Erkl. 13. In Figur 2 (Seite 6), welche für die Ableitung aller vier Aehnlichkeitssätze gemeinschaftlich gilt, ist angenommen, dass $A_2B_2 < A_1B_1$. Wäre die Seite c_2 die grössere, so ragt A_1B' über A_1B_1 hinaus, aber alle Ableitungen bleiben wörtlich gleich, da die Parallele $B'C'$ auch die Seite A_1C_1 ausserhalb C_1 trifft. Uebrigens könnte diese Ausführung auch ganz umgangen werden, indem man einfach festsetzt, dass von den beiden Dreiecken A_1B_1 und A_2B_2 je die Grundseite des kleineren auf die des grösseren abgetragen werden soll, oder dass unter der Bezeichnung $A_1B_1C_1$ je das grössere der beiden Dreiecke verstanden sein soll.

Erkl. 14. Nach dem ersten Kongruenzsatz ist $A_2B_2C_2$ das einzige Dreieck mit dem Seitenverhältnis $a:b:c$ und der Seite $A_2B_2 = c_2$. Sowie also vom Dreieck $A_1B'C'$ nachgewiesen ist, dass auch hier:

$$A_1B' : B'C' : C'A_1 = c : a : b$$

und $A_1B' = c_2$, so ist die Kongruenz von $A_1B'C'$ mit $A_2B_2C_2$ schon erwiesen. Man kann den Beweis für die Gleichheit der drei Seiten aber auch ausdrücklich noch rechnungsmässig führen, indem man setzt:

$$A_1B' : B'C' : C'A_1 = c : a : b$$

und

$$A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = c : a : b,$$

also einzeln:

$$A_1B' : B'C' = c : a \qquad A_2B_2 : B_2C_2 = c : a$$

$$A_1B' : C'A_1 = c : b \qquad A_2B_2 : C_2A_2 = c : b,$$

folglich:

$$B'C' = \frac{a}{c} \cdot A_1B' \qquad B_2C_2 = \frac{a}{c} \cdot A_2B_2$$

$$C'A_1 = \frac{b}{c} \cdot A_1B' \qquad C_2A_2 = \frac{b}{c} \cdot A_2B_2.$$

Wenn also:

$$A_1B' = A_2B_2 = c_2,$$

so wird auch:

$$B'C' = \frac{a}{c} \cdot c_2 = B_2C_2$$

und

$$C'A_1 = \frac{b}{c} \cdot c_2 = C_2A_2.$$

Erkl. 15. In der nebenstehenden Ausdrucksweise des I. Aehnlichkeitssatzes ist stets das Verhältnis der drei Seiten desselben Dreiecks in fortlaufender Proportion angesetzt. Man könnte statt dessen auch das Verhältnis jeder

das einzige Dreieck konstruieren mit der Seite c_2 und dem Seitenverhältnis:

$$a_2 : b_2 : c_2 = a : b : c.$$

3) Trägt man nun aber auf einer der Seiten des erstern Dreiecks, z. B. auf c_1 von einem ihrer Eckpunkte, z. B. von A_1 aus die Länge der entsprechenden Seite c_2 des zweiten Dreiecks ab, also $A_1B' = A_2B_2$, und zieht sodann $B'C' \parallel B_1C_1$, so entsteht ein Dreieck $A_1B'C'$ von folgenden Eigenschaften (siehe Figur 2, Seite 6):

$$A_1B' = A_2B_2,$$

und weil $B'C' \parallel B_1C_1$, so wird auch ferner nach Satz 3 des VI. Teiles:

$$A_1B' : A_1C' = A_1B_1 : A_1C_1$$

und

$$A_1B' : B'C' = A_1B_1 : B_1C_1.$$

Folglich ist:

$$A_1B' : B'C' : C'A_1 = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1,$$

also auch:

$$A_1B' : B'C' : C'A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2.$$

Da aber oben:

$$A_1B' = A_2B_2,$$

so muss auch (siehe Erkl. 14):

$$B'C' = B_2C_2 \text{ und } C'A_1 = C_2A_2$$

sein, oder:

$$\triangle A_1B'C' \cong \triangle A_2B_2C_2.$$

4) Nun ist aber im Dreieck $A_1B'C'$ jeder Winkel gleich dem entsprechenden Winkel von Dreieck $A_1B_1C_1$, nämlich $\sphericalangle A$ identisch und $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ je als korrespondierende Winkel wegen der Parallelen $B'C'$ B_1C_1. Folglich ist auch:

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_1,$$

d. h. im Dreieck $A_2B_2C_2$ sind nicht nur die Seitenverhältnisse gleich jenen des Dreiecks $A_1B_1C_1$, sondern auch die Winkelgrössen. Oder die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich.

5) Ganz dieselben Ergebnisse werden aber auch für jedes weitere Dreieck entstehen mit Seiten $a_3 : b_3 : c_3 = a : b : c$, d. h. es würde nicht nur:

$$A_3B_3 : B_3C_3 : C_3A_3 = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1,$$

sondern auch:

$$\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B_3 = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C_3 = \sphericalangle C_1.$$

Man erhält daher die Aussage:

Satz 2. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten

Seite des einen Dreiecks zur entsprechenden Seite des andern Dreiecks als gleiche Grösse aufstellen, also den Satz so aussprechen:

Satz 2b. Wenn die drei Verhältnisse zwischen je einer Seite eines Dreiecks und der entsprechenden Seite eines andern Dreiecks sämtlich denselben Wert haben — so sind die Dreiecke ähnlich, also auch die entsprechenden Winkel gleichgross.

Oder auch noch kürzer ausgesprochen:

Satz 2c. Gleichheit der drei Seitenverhältnisse bedingt Aehnlichkeit der Dreiecke.

Erkl. 16. Der Gedankengang des vorigen Beweises ist kurz zusammengefasst der folgende:

1) Es gibt nur ein einziges Dreieck mit dem vorgeschriebenen Seitenverhältnis $a:b:c$ und der Seite c_1.

2) Es gibt nur ein einziges Dreieck mit demselben Seitenverhältnis $a:b:c$ und der Seite c_2.

3) Entsteht durch die Parallele beim erstern Dreieck auch ein Dreieck mit Seitenverhältnis $a:b:c$ und Seite c_2, so muss dieses so entstandene mit dem vorigen zweiten kongruent sein.

4) Folglich muss das obige zweite Dreieck auch im übrigen dieselben Eigenschaften haben wie sein kongruentes, nämlich gleiche Winkel, wie das erste Dreieck.

5) Also ist das zweite Dreieck und ebenso jedes andere in derselben Weise konstruierte ähnlich mit dem ersten und allen gleichartigen.

in dem einen Dreieck im gleichen Verhältnis untereinander stehen, wie die drei Seiten im andern Dreieck (I. Aehnlichkeitssatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 2a. Wenn in zwei Dreiecken das Verhältnis der drei Seiten untereinander dasselbe ist, so sind auch die entsprechenden Winkel gleich.

Frage 6. Wie entstehen Dreiecke, von welchen das Verhältnis zweier Seiten und die Grösse des von diesen eingeschlossenen Winkels gegeben ist (z. B. $c:b$, $\sphericalangle \alpha$), und in welcher Beziehung zu einander stehen solche Dreiecke?

Erkl. 17. Zur nebenstehenden Antwort bleiben die Ausführungen der Erkl. 11, 12 und 13 in unveränderter Gültigkeit.

Erkl. 18. In der Antwort der vorigen Frage 5 war es vollkommen gleichgültig, welche Seite des Dreiecks $A_2B_2C_2$ auf der entsprechenden des Dreieeks $A_1B_1C_1$ angetragen wurde, und an welchem Endpunkte dies geschah. Für den Zweck der nebenstehenden Antwort aber ist es zwar ebenfalls von gleicher Endwirkung, wie diese Antragung stattfindet, jedoch gestaltet sich der Beweis am einfachsten, wenn dieselbe an der Ecke A_1 geschieht. Wird nämlich c_2 an der Ecke B_1 oder b_2 an der Ecke C_1 angetragen, so muss erst noch die Gleichheit der Winkel

Antwort. 1) Ist von den Seiten c und b nur das Verhältnis, nicht aber deren Grösse selbst gegeben, so kann man für eine derselben, z. B. c eine beliebige Länge c_1 nehmen, danach erst die Seite b_1 nach Massgabe des vorgeschriebenen Verhältnisses konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen zwei Seiten c_1 und b_1 samt deren eingeschlossenem Winkel α das einzige Dreieck konstruieren mit Seite c_1, Seitenverhältnis $c_1:b_1 = c:b$ und Winkel α.

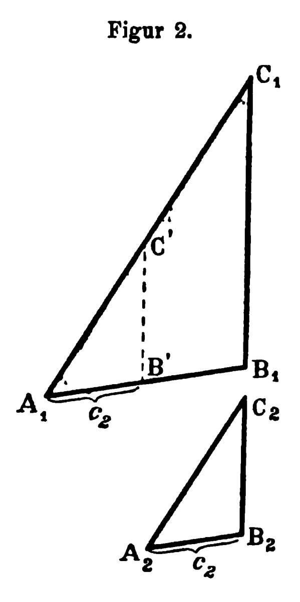
2) Wählt man für die Seite c eine andere beliebige Länge c_2, so kann man wiederum nach Massgabe des ge-

$\alpha_1 = \alpha'$ und $\alpha_1 = \alpha_2$, also $\alpha' = \alpha_2$ daraus erschlossen werden, dass die dritte Seite $A'C'$ bezw. $A'B'$ parallel wird mit der entsprechenden Seite A_1C_1 bezw. A_1B_1. Dann erst ist die Kongruenz $A_2B_2C_2 \cong A'B'C'$ erwiesen.

Würde die dritte Seite a_2 als a' abgetragen an der Ecke B_1 (oder C_1) und die Parallele $C'A' \parallel C_1A_1$ gezogen, so erhält man zunächst die Gleichheit der Winkel $\alpha' = \alpha_1 = \alpha_2$ wie oben, und muss dann für den Kongruenzbeweis erst noch nachweisen, dass wegen $a' : c' : b' = a_1 : c_1 : b_1$ und $a' = a_2$ auch wieder $c' = c_2$ und $b' = b_2$.

Arbeitet man aber wie im nebenstehenden unmittelbar mit den in der Fragestellung genannten Dreieckselementen, so sind alle diese Umwege vermieden.

Figur 2.



Erkl. 19. Nach dem zweiten Kongruenzsatz ist $A_2B_2C_2$ das einzige Dreieck mit Seitenverhältnis $c_2 : b_2 = c : b$, dem Winkel α und der Seite $A_2B_2 = c_2$. Sowie also von dem Dreieck $A_1B'C'$ nachgewiesen ist, dass auch hier $c' : b' = c : b$, $\sphericalangle A = \alpha$ und $A_1B' = c_2$, so ist die Kongruenz von $A_1B'C'$ und $A_2B_2C_2$ schon erwiesen. Man kann aber den Beweis, dass ausser $\sphericalangle A = \alpha$ und $A_1B' = c_2$ auch die Seiten b' und b_2 einander gleich sind, auch ausdrücklich noch rechnungsmässig führen, indem man setzt:

$$A_1B' : C'A_1 = c : b, \quad A_2B_2 : C_2A_2 = c : b,$$

folglich:

$$C'A_1 = \frac{b}{c} \cdot A_1B' \quad C_2A_2 = \frac{b}{c} \cdot A_2B_2.$$

Wenn also $A_1B' = A_2B_2 = c_2$, so wird auch:

$$C'A_1 = \frac{b}{c} \cdot c_2 = C_2A_2.$$

gebenen Verhältnisses die andere Seite b_2 konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen zwei Seiten c_2 und b_2 samt deren eingeschlossenem Winkel α das **einzige Dreieck** konstruieren mit Seite c_2, Seitenverhältnis $c_2 : b_2 = c : b$ und Winkel α.

3) Trägt man aber auf einer der zwei Seiten c_1 oder b_1 des erstern Dreiecks, z. B. c_1 vom Eckpunkt A_1 aus die Länge der entsprechenden Seite c_2 des zweiten Dreiecks ab, also $A_1B' = A_2B_2$, und zieht sodann $B'C' \parallel B_1C_1$, so entsteht ein Dreieck $A_1B'C'$ mit Winkel α, in welchem ausserdem:

$$B'A_1 : C'A_1 = B_1A_1 : C_1A_1 = B_2A_2 : C_2A_2.$$

Folglich muss wegen $A_1B' = A_2B_2$ auch:

$$\triangle A_1B'C' \cong A_2B_2C_2$$

sein.

4) Nun sind aber im Dreieck $A_1B'C'$ nicht nur Winkel α, sondern auch (je als korrespondierende Winkel) die Winkel B' und C' gleich den Winkeln B und C des Dreiecks $A_1B_1C_1$, und nicht nur das Verhältnis der Seiten c' und b' untereinander, sondern auch das Verhältnis der Seite $a' = B'C'$ zu jeder der vorigen Seiten gleich dem Verhältnis der Seite $a_1 = B_1C_1$ des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zu jeder der Seiten c_1 und b_1. Folglich ist auch $\sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1$ und $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_1$ und auch $a_2 : c_2 = a_1 : c_1$ und $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$, d. h. im Dreieck $A_2B_2C_2$ sind nicht nur ein Seitenverhältnis und ein Winkel, sondern alle drei Seitenverhältnisse und alle drei Winkel gleich den entsprechenden drei Seitenverhältnissen und den zugehörigen drei Winkeln des Dreiecks $A_1B_1C_1$ — oder die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind **ähnlich**.

5) Ganz dieselben Ergebnisse würden aber auch für jedes weitere Dreieck $A_3B_3C_3$ entstehen mit den Seiten $c_3 : b_3 = c : b$ und eingeschlossenem $\sphericalangle \alpha$, d. h. es würde nicht nur:

$$c_3 : b_3 = c_1 : b_1 \text{ und } \sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_1,$$

sondern auch:

$$a_3 : c_3 = a_1 : c_1, \quad a_3 : b_3 = a_1 : b_1$$

und

$$\sphericalangle B_3 = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C_3 = \sphericalangle C_1.$$

Erkl. 20. Setzt man wieder statt des Verhältnisses der zwei Dreiecksseiten desselben Dreiecks in nebenstehenden Sätzen die Verhältnisse je einer Seite eines Dreiecks zur entsprechenden Seite des andern Dreiecks als gleichgross, so erhält man folgende Ausdrucksweise:

Satz 8b. Wenn von den Verhältnissen zwischen je einer Seite eines Dreiecks und der entsprechenden eines andern Dreiecks zwei denselben Wert haben, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel in beiden Dreiecken gleichgross ist, so sind die Dreiecke ähnlich, also ist auch der Wert des dritten Seitenverhältnisses gleich dem Wert der beiden ersten, und die zwei anderen Winkel ihren entsprechenden gleich.

Oder auch noch kürzer ausgesprochen:

Satz 8c. Gleichheit zweier Seitenverhältnisse und des eingeschlossenen Winkels bedingt Aehnlichkeit der Dreiecke.

Erkl. 21. Der Gedankengang des vorigen Beweises lässt sich wieder in fünf Sätze zusammenfassen, ähnlich Erkl. 16:

1) Einzigkeit des ersten Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ mit Seitenverhältnis $c:b$, $\sphericalangle \alpha$ und Seite c_1.

2) Einzigkeit des zweiten Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ mit Seitenverhältnis $c:b$, $\sphericalangle \alpha$ und Seite c_2.

3) Hat $A_1 B' C'$ ebenfalls Seitenverhältnis $c:b$, $\sphericalangle \alpha$, Seite $c' = c_2$, so muss $A_1 B' C' \cong A_2 B_2 C_2$.

4) Folglich muss $A_2 B_2 C_2$ auch die übrigen Eigenschaften mit $A_1 B' C'$ gemeinsam haben, nämlich Gleichheit des dritten Seitenverhältnisses und der beiden anderen Winkel.

5) Also ist das zweite und jedes andere derartige Dreieck dem ersten ähnlich.

Man erhält daher die Aussage:

Satz 8. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten in dem einen Dreieck im gleichen Verhältnis zu einander stehen, wie zwei Seiten im andern, und die eingeschlossenen Winkel dieser Seitenpaare in beiden Dreiecken gleichgross sind (II. Aehnlichkeitssatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 8a. Wenn in zwei Dreiecken das Verhältnis zweier Seiten zu einander und die Grösse des von ihnen eingeschlossenen Winkels gleichgross ist, so sind auch alle übrigen entsprechenden Seitenverhältnisse und Winkel gleich.

Frage 7. Wie entstehen Dreiecke, von welchen das Verhältnis zweier Seiten und die Grösse des der grösseren von diesen gegenüberliegenden Winkels gegeben ist (z. B. $c:a$, $\sphericalangle \alpha$), und in welcher Beziehung zu einander stehen solche Dreiecke?

Erkl. 22. Zu nebenstehender Antwort gehört als Figur wieder Figur 2, Seite 6, und ebenso behalten die Erkl. 11, 12 und 13 unveränderte Gültigkeit.

Erkl. 23. Auch hier ist die Wahl der Stelle des ersten Dreiecks, an welcher das zweite abgetragen wird, nicht von wesentlicher Bedeutung, jedoch gestaltet sich der Beweis am einfachsten, wenn man c_2 an der Ecke A_1 abträgt. Wird nämlich c_2 an der Ecke B_1, oder a_2 an einer der Ecken B_1 oder C_1 angetragen, so muss

Antwort. 1) Ist von den Seiten c und a nur das Verhältnis, nicht aber deren Grösse selbst gegeben, so kann man für eine derselben, z. B. c eine beliebige Länge c_1 nehmen, danach erst die Seite a_1 nach Massgabe des vorgeschriebenen Verhältnisses konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen zwei Seiten c_1 und a_1 samt dem der grösseren a_1 gegenüberliegenden Winkel α das einzige Dreieck konstruieren mit Seite c_1, Seitenverhältnis $c_1 : a_1 = c : a$ und Winkel α.

erst die Gleichheit der Winkel $\alpha' = \alpha_1 = \alpha_2$ aus der Parallelität des zweiten Winkelschenkels erschlossen werden; daraus folgt dann wieder die Kongruenz von $A_2B_2C_2 \cong A_1B'C'$.

Würde die dritte Seite b_2 als b' abgetragen an der Ecke A_1 (oder C_1), so erhält man zwar leicht wieder die Gleichheit des Winkels $\alpha' = \alpha_1 = \alpha_2$ wie zuvor, man muss aber für die Kongruenz erst noch nachweisen, dass wegen:

$$b' : c' : a = b_1 : c_1 : a_1 \text{ und } b' = b_2$$

auch wieder:

$$c' = c_2 \text{ und } a' = a_2$$

sein muss.

Alle diese Erschwerungen werden aber vermieden durch Anwendung derjenigen Dreieckselemente, welche in der Fragestellung genannt sind.

Erkl. 24. Ebenso wie in Erkl. 19 für den zweiten Aehnlichkeitsbeweis, so kann man auch hier ausser dem unmittelbaren Schluss auf die Kongruenz der Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_1B'C'$ aus der Einzigkeit des Dreiecks mit Seitenverhältnis $c : a$, $\sphericalangle \alpha$ und Seite $c' = c_2$ auch den rechnungsmässigen Nachweis erbringen, dass, wenn:

$$c' = c_2 \text{ und } c' : a' = c_1 : a_1 = c_2 : a_2 = c : a,$$

auch $a' = a_2$ sein muss. Denn hieraus wird:

$$a' = \frac{a}{c} \cdot c' \text{ und } a_2 = \frac{a}{c} \cdot c_2,$$

folglich $a' = a_2$.

Erkl. 25. Setzt man anstatt des Verhältnisses der Seiten c und a untereinander in jedem einzelnen Dreieck wieder die Verhältnisse je einer Seite im einen Dreieck zur entsprechenden Seite im andern Dreieck, also hier statt $c_1 : a_1 = c_2 : a_2 = c : a$ nunmehr $c_1 : c_2 = a_1 : a_2$, so nimmt der Satz folgende Gestalt an:

Satz 4 b. Wenn von den Verhältnissen zwischen je einer Seite eines Dreiecks und der entsprechenden Seite eines andern Dreiecks zwei denselben Wert haben, und der der grösseren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichgross ist, so sind die Dreiecke ähnlich, also ist auch der Wert des dritten Seitenverhältnisses gleich dem Werte der beiden ersten, und die beiden anderen Winkel sind ihren entsprechenden gleich.

Oder noch kürzer ausgesprochen:

Satz 4c. Gleichheit zweier Seitenverhältnisse und des der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkels bedingt Aehnlichkeit der Dreiecke.

2) Wählt man für die Seite c eine andere beliebige Länge c_2, so kann man wiederum nach Massgabe des gegebenen Verhältnisses die andere Seite a_2 konstruieren oder berechnen, und sodann aus diesen zwei Seiten c_2 und a_2 samt dem der grösseren a_2 gegenüberliegenden Winkel α das einzige Dreieck konstruieren mit Seite c_2, Seitenverhältnis $c_2 : a_2 = c : a$ und Winkel α.

3) Trägt man aber auf der Seite c_1 des erstern Dreiecks vom Eckpunkt A_1 aus die Länge der entsprechenden Seite c_2 des zweiten Dreiecks ab, also $A_1B' = A_2B_2$, und zieht dann $B'C' \parallel B_1C_1$, so entsteht ein Dreieck $A_1B'C'$ mit Winkel α, in welchem ausserdem:

$$A'B' : B'C' = A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2.$$

Folglich muss wegen $A'B' = A_2B_2$ auch $B'C' = B_2C_2$ sein, also:

$$\triangle A_1B'C' \cong A_2B_2C_2.$$

4) Nun sind aber im Dreieck $A_1B'C'$ nicht nur Winkel α, sondern auch (je als korrespondierende Winkel) die Winkel B' und C' gleich den Winkeln B und C des Dreiecks $A_1B_1C_1$, und nicht nur das Verhältnis der Seiten c' und a' untereinander, sondern auch das Verhältnis der Seite $b' = A'C'$ zu jeder der vorigen Seiten gleich dem Verhältnis der Seite $b_1 = A_1C_1$ des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zu jeder der Seiten c_1 und a_1. Folglich ist auch $\sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle C_1$ und auch $b_2 : c_2 = b_1 : c_1$ und $b_2 : a_2 = b_1 : a_1$, d. h. im Dreieck $A_2B_2C_2$ sind nicht nur das eine Seitenverhältnis und ein Winkel, sondern alle drei Seitenverhältnisse und alle drei Winkel gleich den entsprechenden Seitenverhältnissen und den zugehörigen drei Winkeln des Dreiecks $A_1B_1C_1$ — oder die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich.

5) Ganz dieselben Ergebnisse würden aber auch für jedes weitere Dreieck $A_3B_3C_3$ entstehen mit Seiten $c_3 : a_3 = c : a$ und gegenüberliegendem Winkel α, d. h. es würde nicht nur $c_3 : a_3 = c_1 : a_1$ und $\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_1$, sondern auch:

$$b_3 : c_3 = b_1 : c_1, \quad b_3 : a_3 = b_1 : a_1$$

und

$$\sphericalangle B_3 = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C_3 = \sphericalangle C_1.$$

Man erhält daher die Aussage:

Satz 4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten in dem einen Dreieck im gleichen Verhältnis zu einander stehen, wie zwei Seiten im andern Dreieck, und die je der grösseren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel in beiden Dreiecken gleichgross sind (III. Aehnlichkeitssatz).

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 4a. Wenn in zwei Dreiecken das Verhältnis zweier Seiten zu einander und die Grösse des der grösseren von beiden gegenüberliegenden Winkels gleichgross ist, so sind auch alle übrigen entsprechenden Seitenverhältnisse und Winkel gleich.

Erkl. 26. Der Gedankengang dieser Beweisführung ist kurz folgender:

1) bezw. 2) Einzigkeit der Dreiecke $A_1B_1C_1$ bezw. $A_2B_2C_2$ mit Seitenverhältnis $c:a$, $\sphericalangle\,\alpha$ und Seite c_1 bezw. c_2.

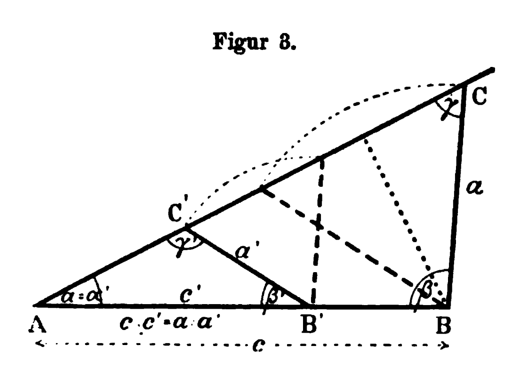
3) Zweite Entstehungsart eines ebensolchen Dreiecks letzterer Art bedingt dessen Kongruenz mit $A_2B_2C_2$.

4) Folge hievon ist Gemeinsamkeit aller Eigenschaften dieser beiden Dreiecke, insbesondere:

5) Aehnlichkeit mit $A_1B_1C_1$.

Frage 8. In welcher Beziehung stehen solche Dreiecke, in welchen zwar ebenfalls das Verhältnis zweier Seiten, aber hiezu ausserdem die Grösse des der kleinern dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels gleich ist?

Figur 8.



Erkl. 27. In Figur 8 sind die beiden Arten von Dreiecken mit Seitenverhältnis $c:a$, $\sphericalangle\,\alpha$ und Seiten $c = AB$ bezw. $c' = AB'$ gezeichnet, indem durch Punkt B' Parallelen gezogen sind zu den beiden Lagen der Geraden a im ersten Falle. Daraus erkennt man die Richtigkeit der nebenstehenden Ungleichungen unmittelbar.

Im einzelnen sieht man, dass die im Punkte B zusammentreffenden Seiten a ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Basiswinkel einander gleich, also gleich dem Supplement des als Aussenwinkel erscheinenden Winkels γ' sind. Ferner erkennt man, dass aus der Winkelsumme

Antwort. Ist der gleichgrosse Winkel α nicht gegenüber der grössern, sondern der kleinern Seite, also nicht wie oben $a > c$, sondern $a < c$, so gibt es nach dem dritten Kongruenzsatz (Antw. der Frage 128 des III. T.) zweierlei Dreiecke mit Seitenverhältnis $c:a$, $\sphericalangle\,\alpha$ und Seite c_1. Von diesen hat das eine einen spitzen Winkel γ, einen grossen Winkel β und eine lange Seite b, das andere einen stumpfen Winkel γ, einen kleinen Winkel β und eine kurze Seite b.

Ebenso gibt es zweierlei Dreiecke mit Seitenverhältnis $c:a$, $\sphericalangle\,\alpha$ und Seite c_2, die sich auf genau gleiche Weise unterscheiden.

Man erkennt nun nach voriger Antwort sofort, dass das Dreieck erster Art mit Seite c_2 ähnlich ist dem Dreieck erster Art mit Seite c_1 und ebenso das Dreieck zweiter Art mit Seite c_2 ähnlich dem Dreieck zweiter Art mit Seite c_1, nicht aber in gemischter Zusammenstellung. Bezeichnet man aber nun mit β, β'; γ, γ'; b, b' die ungleichen

$\alpha + \beta + \gamma = 180 = \alpha' + \beta' + \gamma'$ zusammen mit $\alpha = \alpha'$ und $\gamma = 180 - \gamma$ hervorgeht, was nebenstehend für die Beziehungen unter β und β' mit den anderen Winkeln aufgestellt wird. (Auch kann $\gamma = \sphericalangle CC'B'$ als Aussenwinkel des Dreiecks $A'B'C'$ gelten, also $\gamma = \alpha + \beta'$.)

Erkl. 28. Aus den letzteren Beziehungen geht unmittelbar hervor, dass die behandelte Zweideutigkeit überhaupt nur möglich ist, solange α spitz bleibt. Für $\alpha = 90$ oder $\alpha > 90$ müsste $\beta + \beta'$ negativ werden, γ' könnte nicht stumpf werden — alles aus dem Grunde, weil bei rechtem oder stumpfem Winkel α die Seite a nicht mehr kleiner als c sein kann.

Auch bei spitzem Winkel α kann Eindeutigkeit eintreten, wenn $a = c$, oder wenn a gleich der Senkrechten, also gleich $\sqrt{c^2 - b^2}$, so dass ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse c, Katheten a und b entsteht.

Erkl. 29. Unter den Seiten b und b' im allgemeinen Falle lässt sich mit den Mitteln der Elementargeometrie keine Beziehung aufstellen. Dagegen kann man mittels der trigonometrischen Hilfsmittel, der sog. Funktion Sinus die Beziehung finden:

$$b : b' = \sin\beta : \sin\beta' = \sin\beta : \sin(\gamma - \alpha),$$

da im gleichen Dreieck entsteht:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \quad a : b' = \sin\alpha : \sin\beta'.$$

Mit dem in Worte gefassten Ausdruck dieser nicht elementaren Beziehung müsste man also die nebenstehende Erweiterung des III. Aehnlichkeitssatzes vervollständigen.

Erkl. 30. Man vergleiche zu diesen Untersuchungen diejenigen des entsprechenden dritten Kongruenzsatzes in den Antworten der Fragen 119 und 128 samt den Erkl. 227 und 248 des III. Teiles dieses Lehrbuches, sowie Aufgabe 121 in Kleyers Lehrbuch der Trigonometrie.

Dreieckselemente der beiden Arten von Dreiecken, so erkennt man aus Figur 3:

$\gamma' = 180 - \gamma$,

$\beta = 180 - \alpha - \gamma$

$\beta' = 180 - \alpha' - \gamma' = 180 - \alpha - 180 + \gamma = \gamma - \alpha$

$\beta + \beta' = 180 - 2\alpha = 2(90 - \alpha)$

$\beta - \beta' = 180 - 2\gamma = 2(90 - \gamma) = 2(\gamma' - 90)$.

Man kann also den Satz 4 in der Art erweitern, dass man ausspricht:

Wenn in zwei Dreiecken das Verhältnis zweier Seiten zu einander und die Grösse des der kleinern von beiden gegenüberliegenden Winkels gleichgross ist, so sind die Dreiecke entweder ähnlich — oder die Gegenwinkel der grössern Seite sind supplementär, die Gegenwinkel der dritten Seite ergänzen einander zum doppelten Komplement des gleichgrossen Winkels; mit der dritten Seite besteht keine elementare Beziehung.

Entsprechend dieser Zweideutigkeit könnte man auch den Aehnlichkeitssatz selbst in der andern Fassung aussprechen:

Satz 4 d. Sind zwischen zwei Dreiecken zwei Seitenverhältnisse einander gleich, während die Gegenwinkel des einen Paares entsprechender Seiten einander gleich, die Gegenwinkel des andern Paares entsprechender Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Frage 9. Wie entstehen Dreiecke, von welchen die Grösse der drei Winkel gegeben ist, und in welcher Beziehung zu einander stehen solche Dreiecke?

Erkl. 31. Ueber Dreiecke mit drei gleichen Winkeln war schon in Antwort der Frage 54 des V. Teiles dieses Lehrbuches das Ergebnis gewonnen worden, dass ihre Flächen sich wie die Quadrate entsprechender Seiten verhalten. Eine Erweiterung dieser Aussage wird sich später auch hier wieder finden. Die Definition der Aehnlichkeit war an der genannten Stelle der Einfachheit halber an die Gleichheit der Winkel allein angeknüpft worden; und auf

Antwort. 1) Ist über die Seiten eines Dreiecks gar keine Angabe vorhanden, so kann man für eine derselben, z. B. c, eine beliebige Länge c_1 nehmen, danach erst am Eckpunkt A den Winkel α, in B den Winkel β antragen, d. h. das einzige Dreieck konstruieren mit Seite c_1 und Winkeln α, β, γ.

2) Wählt man für die Seite c eine andere beliebige Länge c_2, so kann

Grund einfacher, aber im Grunde ganz analoger Betrachtungen wie hier, folgte obiges Ergebnis samt dem Zusatz der Proportionalität der Seiten. Hier aber tritt letztere als Hauptpunkt auf.

Erkl. 32. Als Figur zu nebenstehender Ueberlegung gilt immer noch Figur 2, Seite 6, wofür auch die Erkl. 12 und 13 unveränderte Gültigkeit behalten. Im einzelnen ist zu beachten, dass hier vollständig gleichgültig ist, an welcher Stelle des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ man Seite c_2 des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ anträgt.

Erkl. 33. Setzt man anstatt des Verhältnisses der Seiten innerhalb eines Dreiecks untereinander die Verhältnisse je zweier entsprechenden Seiten der zwei Dreiecke, so nimmt der Aehnlichkeitssatz folgende Gestalt an:

Satz 5b. Wenn die einzelnen Winkel zweier Dreiecke paarweise gleichgross sind, so sind auch die einzelnen Seitenverhältnisse entsprechender Seiten beider Dreiecke alle drei gleich.

Oder noch kürzer ausgesprochen:

Satz 5c. Gleichheit der Winkel bedingt Gleichheit der Seitenverhältnisse, also Aehnlichkeit der Dreiecke.

Erkl. 34. Das wichtigste im Ansatz der Proportionalität der Seiten ist die Beobachtung der entsprechenden Seitenpaare, d. h. der Seiten gegenüber gleichgrossen Winkeln. Als Beispiel möge dienen der in Erkl. 250 und 251 des III. Teiles erwähnte Fall, dass es dreierlei Dreiecke gibt mit denselben Winkeln und einer, aber nicht allen gleichen Seite. Denn in Figur 4 sind zwar die Winkel der drei Dreiecke gleich, aber als entsprechende Seiten sind proportional nicht jedesmal AB, BC, CA, sondern:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2C_2 : C_2B_2 : B_2A_2 = C_3A_3 : A_3B_3 : B_3C_3$$

oder:

$$c_1 : a_1 : b_1 = b_2 : a_2 : c_2 = b_3 : c_3 : a_3.$$

man wiederum durch entsprechendes Antragen der Winkel das einzige Dreieck konstruieren mit Seite c_2 und Winkeln α, β, γ.

3) Trägt man aber auf irgend einer der drei Seiten des ersten Dreiecks von einem der beiden Eckpunkte aus (z. B. auf c_1) vom Eckpunkt A_1 die Länge der entsprechenden Seite c_2 des zweiten Dreiecks ab, also (vergleiche Figur 2, Seite 6) $A_1B' = A_2B_2$, und zieht sodann $B'C' \parallel B_1C_1$, so entsteht wieder ein Dreieck $A_1B'C'$ mit Winkeln α, β, γ und Seite $c' = c_2$. Folglich ist unmittelbar $A_1B'C' \cong A_2B_2C_2$.

4) Nun ist aber im Dreieck $A_1B'C'$ eben wegen der Winkelgleichheiten an den Parallelen auch $a' : b' : c' = a_1 : b_1 : c_1$. Folglich ist auch $a_2 : b_2 : c_2 = a_1 : b_1 : c_1$, d. h. nicht nur die Winkel des Dreiecks $A_2B_2C_2$, sondern auch dessen Seitenverhältnisse sind gleich den entsprechenden Seitenverhältnissen des Dreiecks $A_1B_1C_1$ — oder die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ sind ähnlich.

5) Ganz dasselbe Ergebnis würde aber auch für jedes weitere Dreieck $A_3B_3C_3$ entstehen mit Winkeln α, β, γ und Seite c_3, d. h. es würde nicht nur:

$$\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_1,\ \sphericalangle B_3 = B_1,\ \sphericalangle C_3 = \sphericalangle C_1,$$

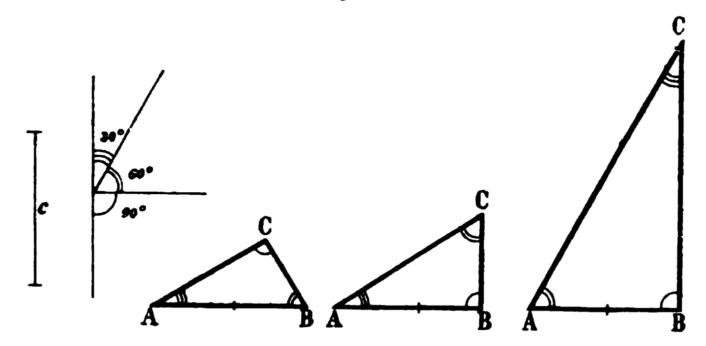
sondern auch:

$$a_3 : b_3 : c_3 = a_1 : b_1 : c_1.$$

Man erhält daher die Aussage:

Satz 5. Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei (also alle drei) Winkel des einen Dreiecks so gross sind als zwei (drei) Winkel des andern (IV. Aehnlichkeitssatz).

Figur 4.



Erkl. 85. Der IV. Aehnlichkeitssatz gibt eine genauere Fassung des schon in Aufgabe 200 des III. Teiles aufgestellten Satzes. Während dort nur bewiesen war, dass in ähnlichen Dreiecken alle drei Seiten in gleicher Richtung verschieden sein müssten (alle drei grösser bezw. alle drei kleiner), so erhält man hier die Bestätigung, dass auch das Verhältnis bei allen drei entsprechenden Seiten gleich sein muss.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 5a. Wenn in zwei Dreiecken die Winkelgrössen einzeln gleich sind, so sind auch die entsprechenden Seitenverhältnisse in beiden Dreiecken gleichgross.

Frage 10. Worauf hat man beim Anschreiben einer Aehnlichkeitsbeziehung besonders zu achten?

Erkl. 86. Es ist nicht gleichgültig, ob man schreibt $\triangle ABC \sim DEF$ oder $\triangle ABC \sim EFD$ oder FDE. Sondern wenn links ABC und rechts DEF als ähnlich einander gegenüber stehen sollen, so muss D der dem Punkt A entsprechende Punkt sein, DE die der Strecke AB entsprechende, Punkt E dem Punkt B, Strecke EF der Strecke BC, Winkel $DEF = ABC$ u. s. w.

Hat man also richtig $\triangle \underbrace{ABC} \sim \underbrace{DEF}$, so kann man hieraus, ohne auch die Figur nur noch anzusehen, unmittelbar ablesen:

Punkte $A \sim D$, $B \sim E$, $C \sim F$;

Strecken $AB : BC : CA = DE : EF : FD$

oder auch:

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD;$$

Winkel $ABC = DEF$, $\sphericalangle BCA = EFD$, $\sphericalangle CAB = FDE$.

Erkl. 87. Entsprechende Elemente ähnlicher Figuren werden auch homologe Elemente genannt. Solche sind z. B. beim Dreieck die grösste Seite des einen und die grösste des andern, der mittlere Winkel beider Dreiecke u. s. w. Man findet demnach richtige Formeln für Aehnlichkeit leicht danach, dass man die Anschreibung beider Dreiecke in homologen Eckpunkten beginnt (z. B. je im Scheitel des kleinsten Winkels) und in beiden Dreiecken über homologe Elemente als zweite weiterschreitet (z. B. vom genannten Eckpunkt jedesmal über die grösste Seite weitergeht). Dann ist die entsprechende Reihenfolge und damit die Richtigkeit der Formel gesichert.

Antwort. Bei schriftlicher Bezeichnung der Aehnlichkeit hat man besonders darauf Rücksicht zu nehmen, dass Punkte und Strecken der Figuren auf beiden Seiten des Aehnlichkeitszeichens in derjenigen entsprechenden Anordnung und Reihenfolge aufgeführt werden, wie dieselben einander in beiden Figuren zugeordnet sind.

Wird nämlich dieser Grundsatz beobachtet, so ist es ausserordentlich erleichtert, aus einer angeschriebenen Aehnlichkeitsbeziehung die proportionalen Strecken bezw. gleichen Winkel abzulesen: es sind eben genau diejenigen Stücke zugeordnet, deren bezeichnende Buchstaben auf beiden Seiten der angeschriebenen Formel gleiche Stellung haben.

---

2) Ueber die Anwendung der Aehnlichkeit auf das allgemeine Dreieck.

Frage 11. Zu welchen Ergebnissen gelangt man bei Vergleichung dreier Dreiecke, von welchen eines mit den beiden andern ähnlich ist?

Antwort. Man erkennt unmittelbar aus der Definition der Aehnlichkeit überhaupt die Richtigkeit der Aussage:

Satz 6. Wenn zwei Dreiecke einzeln mit einem dritten Dreiecke ähnlich sind, so sind sie unter sich ähnlich.

Oder in anderer Ausdrucksweise:

Satz 6a. Wenn von zwei einander ähnlichen Dreiecken das eine einem dritten Dreieck ähnlich ist, so ist auch das zweite Dreieck diesem dritten ähnlich.

Die gemeinsame Voraussetzung ist für beide Sätze:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2,\ \triangle A_1B_1C_1 \sim A_3B_3C_3$$

und die gemeinsame Folgerung:

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim A_3B_3C_3.$$

Erkl. 38. Da kongruente Figuren auch von selbst ähnlich sein müssen, so erhält man besondere Fälle der beiden Sätze, indem man in deren Bedingungssätzen die Aehnlichkeit durch Kongruenz ersetzt, z. B.: Wenn von zwei kongruenten Dreiecken das eine einem dritten ähnlich ist — oder wenn von zwei ähnlichen Dreiecken das eine einem dritten kongruent ist — so ist auch das andere dem dritten ähnlich.

Erkl. 39. Ein Beweis der nebenstehenden Sätze ist eigentlich unnötig, da sie durch einfache Ueberlegung klar werden. Derselbe würde so lauten:

Wenn nach Voraussetzung

$$\sphericalangle A_1 = A_2,\ \sphericalangle B_1 = B_2,\ \sphericalangle C_1 = C_2;\quad a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,$$

und:

$$\sphericalangle A_1 = A_3,\ \sphericalangle B_1 = B_3,\ \sphericalangle C_1 = C_3;\quad a_1 : b_1 : c_1 = a_3 : b_3 : c_3,$$

so folgt unmittelbar auch:

$$\sphericalangle A_2 = A_3,\ \sphericalangle B_2 = B_3,\ \sphericalangle C_2 = C_3;\quad a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3.$$

Frage 12. Wie kann man von einem Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels und seiner Schenkelrichtungen ein dem ganzen Dreieck ähnliches Dreieck abschneiden?

Antwort. Man erhält ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck, indem man unter Beibehaltung zweier Seiten desselben zur dritten Seite entweder eine Parallele oder eine Antiparallele zeichnet. Denn das neu entstehende Dreieck hat mit dem ursprünglichen drei entsprechend gleiche Winkel, nämlich ausser dem beibehaltenen Winkel noch an der Parallelen die beiden Paare korrespondierender Winkel, an der Antiparellelen die an den beiden Schenkelseiten gegenüberliegenden gleichgrossen Winkel.

Erkl. 40. Dass durch Parallele zu einer Dreiecksseite ein ähnliches Dreieck entsteht, ist schon in jedem der vorausgegangenen vier Aehnlichkeitsbeweise angewendet.

Die Aehnlichkeit der durch zwei Antiparallelen erzeugten Dreiecke wird geliefert durch den Ansatz der Proportionalität der Seiten nach dem Inhalt des fünften Abschnitts im IV. Teile dieses Lehrbuches. In solchen Lehrbüchern, wo jener Abschnitt nicht selbständig vertreten ist, erfolgt daher die Aufstellung jener Sätze erst an der jetzigen Stelle nach den Beweisen der Aehnlichkeit.

Frage 13. Welche Beziehungen entstehen, wenn in ähnlichen Dreiecken entsprechende Höhen gezogen werden?

Antwort. Zieht man in zwei ähnlichen Dreiecken $ABC \sim A'B'C'$ die Höhen h_c und h_c' und vergleicht die entsprechenden Dreiecke ACD und $A'C'D'$ bezw. BCD und $B'C'D'$, so erkennt man, dass darin $\alpha = \alpha'$, $ADC = A'D'C' = 90^0$ bezw. $\beta = \beta'$ und $BDC = B'D'C' = 90^0$; also sind diese

Erkl. 41. Dass nebenstehende Ableitung für alle drei Höhen gleichmässig gilt, geht schon aus deren Allgemeinheit hervor. Man beweist aber leicht auch einzeln, dass, wenn E und F die Fusspunkte der Höhen h_a und h_b sind, dann auch:

$$ABE \sim A'B'E', \quad ACE \sim A'C'E'$$
und
$$BAF \sim B'A'F', \quad BCF \sim B'C'F'.$$
Folglich auch:
$$\sphericalangle BAE = B'A'E' = 90 - \beta$$
und
$$\sphericalangle CAE = C'A'E' = 90 - \gamma,$$
sowie:
$$\sphericalangle ABF = A'B'F' = 90 - \alpha$$
und
$$\sphericalangle CBF = C'B'F' = 90 - \gamma.$$
Und weiter die Proportion:
$$c : h_a : q_a = c' : h_a' : q_a'$$
und
$$b : h_a : p_a = b' : h_a' : p_a'$$
oder:
$$c : c' = h_a : h_a' = q_a : q_a' = b : b' = p_a : p_a',$$
und ferner:
$$c : h_b : p_b = c' : h_b' : p_b'$$
und
$$a : h_b : q_b = a' : h_b' : q_b'$$
oder:
$$c : c' = h_b : h_b' = p_b : p_b' = a : a' = q_b : q_b'.$$

Erkl. 42. Fasst man alle diese Proportionen zusammen, so entsteht:
$$a : b : c : h_a : h_b : h_c : p_a : p_b : p_c : q_a : q_b : q_c$$
$$= a' : b' : c' : h_a' : h_b' : h_c' : p_a' : p_b' : p_c' : q_a' : q_b' : q_c'$$
oder:
$$\frac{a}{a'} = \frac{h_a}{h_a'} = \frac{p_a}{p_a'} = \frac{q_a}{q_a'} = \frac{b}{b'} = \frac{h_b}{h_b'}$$
$$= \frac{p_b}{p_b'} = \frac{q_b}{q_b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h_c}{h_c'} = \frac{p_c}{p_c'} = \frac{q_c}{q_c'},$$
nebst sämtlichen daraus hervorgehenden Einzelproportionen oder Gleichheiten.

Dreiecke entsprechend ähnlich nach dem IV. Aehnlichkeitssatz wegen Gleichheit zweier Winkel, also $ACD \sim A'C'D'$ und $BCD \sim B'C'D'$. Man erhält daher ausser $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ auch:
$$ACD = A'C'D' = 90 - \alpha,$$
$$BCD = B'C'D' = 90 - \beta,$$
sowie:
$$a : h_c : q_c = a' : h_c' : q_c'$$
und
$$b : h_c : p_c = b' : h_c' : p_c'$$
oder:
$$a : a' = h_c : h_c' = q_c : q_c' = b : b' = p_c : p_c'.$$

Man findet also: **In ähnlichen Dreiecken werden durch entsprechende Höhen gleichgrosse Teilwinkel abgeteilt; und die Höhen selbst, sowie deren zugehörige Abschnitte stehen in demselben Verhältnis, wie je zwei entsprechende Seiten beider Dreiecke.**

Frage 14. Welche Beziehungen entstehen, wenn in ähnlichen Dreiecken die Mittellinien gezogen werden?

Antwort. Zieht man in zwei ähnlichen Dreiecken $ABC \sim A'B'C'$ die Mittellinien m_c und m_c' und vergleicht die entstehenden Dreiecke ACD und $A'C'D'$ bezw. BCD und $B'C'D'$, so erkennt man, dass im ersteren Paare jedesmal der Winkel α, im letztern der Winkel β vorhanden ist. Ausserdem ist:
$$AD = BD = \frac{c}{2}, \quad A'D' = B'D' = \frac{c}{2},$$
also fürs erste Dreieckspaar:
$$AC : AD = b : \frac{c}{2} = b' : \frac{c'}{2} = A'C' : A'D',$$
und ebenso im zweiten Dreieckspaare. Folglich ist nach dem II. Aehnlichkeitssatz sowohl:
$$\triangle ACD \sim A'C'D' \text{ als } \triangle BCD \sim B'C'D',$$

Erkl. 43. Nennt man E und F hier die Halbierungspunkte der Seiten a und b, so werden wieder nach dem II. Aehnlichkeitssatz auch die Dreiecke:
$$ABE \sim A'B'E', \quad ACE \sim A'C'E';$$
$$BAF \sim B'A'F', \quad BCF \sim B'C'F'.$$
Denn wenn z. B., wie nebenstehend $a : c = a' : c'$, so ensteht durch Division der zweiten Proportionsglieder auf beiden Seiten:
$$a : \frac{c}{2} = a' : \frac{c'}{2}.$$
Es ist also nicht nur für m_c die Gleichheit der entsprechenden Winkel- und Streckenverhältnisse erwiesen, sondern für jede der drei Mittellinien:
$$\sphericalangle(cm_a) = (c'm_a'), \quad \sphericalangle(bm_a) = (b'm_a');$$
$$\sphericalangle(cm_b) = (c'm_b'), \quad \sphericalangle(am_b) = (a'm_b')$$

und allgemein:

$a : b : c : m_a : m_b : m_c = a' : b' : c' : m_a' : m_b' : m_c'$

oder:

$$\frac{a}{a'} = \frac{m_a}{m_a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m_b}{m_b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m_c}{m_c'}.$$

Man hat hier weniger neue Proportionen erhalten, aber dafür zweierlei neue Winkelgleichheiten, während für die Höhen zweierlei neue Proportionen, aber nur einerlei neue Winkelgleichheiten entstanden.

und folglich:

$\sphericalangle ACD = A'C'D'$, $\sphericalangle ADC = A'D'C'$

und

$\sphericalangle BCD = B'C'D'$, $\sphericalangle BDC = B'D'C'$.

Ferner:

$$b : \frac{c}{2} : m_c = b' : \frac{c'}{2} : m_c'$$

und

$$a : \frac{c}{2} : m_c = a' : \frac{c'}{2} : m_c'.$$

Man findet also: In ähnlichen Dreiecken werden durch entsprechende Mittellinien gleichgrosse Teilwinkel gebildet, und die Mittellinien selbst stehen in demselben Verhältnis, wie je zwei entsprechende Seiten.

Frage 15. Welche Beziehungen entstehen, wenn in ähnlichen Dreiecken die Winkelhalbierenden gezogen werden?

Antwort. Zieht man in zwei ähnlichen Dreiecken $ABC \sim A'B'C'$ die Winkelhalbierenden w_c und w_c' und vergleicht die entstehenden Dreiecke ACD und $A'C'D'$ bezw. BCD und $B'C'D'$, so erkennt man, dass diese Dreieckspaare entsprechend ähnlich sind nach dem IV. Aehnlichkeitssatz wegen Gleichheit je zweier Winkel, nämlich im ersten Paare $\alpha = \alpha'$ und $\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma'}{2}$, im zweiten Paare $\beta = \beta'$ und wieder $\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma'}{2}$. Folglich ist auch hier wieder $\sphericalangle (w_c c) = (w_c' c')$, und zwar nach beiden Seiten von w_c gemessen, sowie auch:

$$a : w_c : v_c = a' : w_c' : v_c'$$

und

$$b : w_c : u_c = b' : w_c' : u_c',$$

oder zusammengefasst:

$$a : a' = b : b' = w_c : w_c' = u_c : u_c' = v_c : v_c'.$$

Also findet man: In ähnlichen Dreiecken bilden entsprechende Winkelhalbierende gleichgrosse Winkel mit den Gegenseiten; und die Winkelhalbierenden selbst, sowie deren Seitenabschnitte stehen in demselben Verhältnis, wie je zwei entsprechende Seiten.

Erkl. 44. Auch hier entstehen wieder die weiteren Winkelgleichheiten und Proportionen, so dass allgemein;

$\sphericalangle (a w_a) = (a' w_a')$ und $\sphericalangle (b w_b) = (b' w_b')$,

sowie:

$$a : b : c : w_a : w_b : w_c : u_a : u_b : u_c : v_a : v_b : v_c$$
$$= a' : b' : c' : w_a' : w_b' : w_c' : u_a' : u_b' : u_c' : v_a' : v_b' : v_c'$$

oder:

$$\frac{a}{a'} = \frac{w_a}{w_a'} = \frac{u_a}{u_a'} = \frac{v_a}{v_a'} = \frac{b}{b'} = \frac{w_b}{w_b'}$$
$$= \frac{u_b}{u_b'} = \frac{v_b}{v_b'} = \frac{c}{c'} = \frac{w_c}{w_c'} = \frac{u_c}{u_c'} = \frac{v_c}{v_c'}.$$

Erkl. 45. Nicht nur die ganzen Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden verhalten sich wie die entsprechenden Seiten, sondern auch deren entsprechende Teilstrecken. Bezeichnet man mit P den Schnittpunkt der Linien, so sind auch jedesmal Dreiecke ähnlich von der Gestalt $APD \sim A'P'D'$, also auch etwa die unteren Abschnitte der Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierenden in einem Dreieck wie jene im andern u. s. w. Zum Beweis benützt man jeweils die Aehnlichkeit solcher Dreiecke:

$$APD \sim A'P'D'.$$

Denn darin ist z. B. für die Höhen ausser dem rechten Winkel aus Antwort der Frage 13 zu entnehmen:

$\sphericalangle (h_a c) = \sphericalangle (h_a' c')$ und $q_c : q_c' = a : a' \cdots$

Für die Mittellinien ebenso aus Antwort der Frage 14:

$\sphericalangle (m_a c) = (m_a' c')$ und $(m_c c) = (m_c' c')$;

für die Winkelhalbierenden ebenso:

$$(w_a c) = (w_a' c') \text{ und } (w_c c) = (w_c' c').$$

(Für die Mittellinien folgt dasselbe auch aus deren bekannter gegenseitiger Teilung im Verhältnis 1 : 2.)

Erkl. 46. Nicht nur für die Abschnitte solcher Linien gleicher Art, sondern auch für solche ungleicher Art gelten dieselben Gesetze. Ist etwa AQC das Dreieck aus b, m_a, w_c in beiden ähnlichen Dreiecken, so hat man nach dem vorigen:

$$\sphericalangle(b m_a) = (b' m_a') \text{ und } \sphericalangle(b w_c) = (b' w_c'),$$

also $AQC \sim AQ'C'$, und somit bilden auch $(m_a w_c)$ und $(m_a' w_c')$ gleichgrosse Winkel miteinander, und die Abschnitte $AP : A'P'$ und $CP : C'P'$ stehen im gleichen Verhältnis wie $a : a'$ u. s. w.

Frage 16. Welche weitere Beziehungen derselben Art wie in vorigen Antworten lassen sich aufstellen?

Antwort. 1) Unter die Anwendungen derselben Art von Beziehungen fallen die Radien der Umkreise und die Mittelsenkrechten. Denn von dem Schnittpunkte O gehen die drei Radien r und die drei Mittelsenkrechten aus. In jedem Dreieck derselben ist eine halbe Dreiecksseite, ein rechter Winkel, und der Winkel an O ist gleich dem Gegenwinkel des Dreiecks, also auch:

$$a : a' = \cdots = r : r' = x_a : x_a' = \cdots$$

und $\sphericalangle(ra) = (r'a')$ u. s. w.

2) Dasselbe gilt von den Radien der In- und Ankreise. Denn in den Schnittpunkten M treffen sich die drei Radien ϱ_0 bezw. ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c und die drei Winkelhalbierenden. In jedem Dreieck derselben ist ein rechter Winkel und ein halber Dreieckswinkel; und eine Seitenstrecke ist gleich der Differenz zwischen der halben Seitensumme und der Gegenseite. Folglich auch:

$$a : a' = \cdots = \varrho_0 : \varrho_0' = \varrho_a : \varrho_a' = \cdots$$

3) Endlich erhält man dieselbe Beziehung für irgend welche durch Addition oder Subtraktion der proportionalen Strecken gebildete Zusammenstellungen derselben. So besonders für die Umfänge der Dreiecke, und zwar sowohl der ursprünglichen Dreiecke ABC und $A'B'C'$ als auch irgend welcher Teildreiecke ACD oder APD oder AQC, wie oben mehrfach. Denn gilt für die Seiten die Proportionalität einzeln, so gilt dieselbe auch für die Seitensummen.

Erkl. 47. Bei den in vorigen Antworten behandelten Strecken war immer eine Dreiecksseite selbst vorhanden, so dass das Verhältnis der untersuchten Strecken von selbst gleich dem Verhältnis der entsprechenden Seiten wurde. Bei der Grösse r geschieht dieselbe Vermittlung durch die Strecke, welche gleich der halben Seite ist. Denn die halben Seiten verhalten sich wie die ganzen. Bei der Strecke ϱ geschieht dieselbe Vermittlung durch die Tangentenabschnitte $_st$ bezw. t', t'', t''' (siehe Antwort der Frage 66 des IV. Teiles). Würde keine solche Strecke vorhanden sein, so fände sich bloss für die Seiten x, y, z eines solchen Dreiecks, dass $x : x' = y : y' = z : z'$, nicht aber, dass dieser Wert auch gleich $a : a'$ u. s. w. Nun aber hat der Tangentenabschnitt die Grösse $s - a$ bezw. $s - b$, $s - c$ oder s. Und aus den einfachen Sätzen über Proportionen (s. Erkl. 73 des VI. Teiles) folgt, dass $s : s' = a : a' = \cdots$, und auch $(s - a) : (s' - a') = a : a' \cdots$ Da also eine Strecke der Dreiecke für ϱ schon in diesen Grössen ausgedrückt ist, so gilt die Proportionalität für alle.

Erkl. 48. Für die Umfänge wendet man am besten die dritte der in Erkl. 5 aufgestellten Darstellungen an. Ist $a : a' = b : b' = c : c'$, so kann man setzen:

$$a = x \cdot a'$$
$$b = x \cdot b'$$
$$c = x \cdot c',$$

also durch Addition:

$$a + b + c = x \cdot a' + x \cdot b' + x \cdot c' = x(a' + b' + c'),$$

folglich $u = x \cdot u'$, $s = x \cdot s'$, also auch:

$$u : u' = a : a' = \cdots = s : s'.$$

Ebenso für jedes beliebige Dreieck solcher Strecken nach derselben Methode.

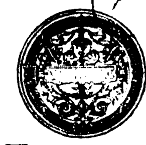
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1317. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1316. — Seite 17—32.
Mit 6 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1316. — Seite 17—32. Mit 6 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Frage 17. Unter welchem Gesichtspunkt lassen sich die Ergebnisse der vorigen Antworten zusammenfassen?

Antwort. Als Zusammenfassung der vorigen Ergebnisse kann man folgende Aussage machen:

Satz 7. Zieht man in ähnlichen Dreiecken entweder (1,2) von entsprechenden Eckpunkten aus oder (3,4) von solchen Punkten, welche zwei entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis teilen, Strecken von der Eigenschaft, dass sie (1,3) mit entsprechenden Seiten gleiche Winkel bilden oder (2,4) entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis teilen, so verhalten sich solche Strecken als ganze, sowie in entsprechenden Abschnitten, wie je zwei entsprechende Seiten, und bilden mit entsprechenden Strecken gleiche Winkel.

Erkl. 49. Höhen, Winkelhalbierende, Umkreisradien fallen unter die erste Gattung der nebenstehenden Linien, ihre zugehörigen Teildreiecke sind ähnlich nach dem IV. Satze; Mittellinien fallen unter die zweite, mit Aehnlichkeit der Teildreiecke nach dem II. Satze; Mittelsenkrechte und Radien der Berührungskreise gehören zur dritten Gruppe; Mittelparallelen eines Dreiecks (oder nach Frage 12 gezogene) zur vierten Gruppe.

Erkl. 50. Linien von der Art in nebenstehendem Satze in ähnlichen Figuren überhaupt nennt man „ähnlich liegende Linien“, ihre Schnittpunkte „ähnlich liegende Punkte“.

Frage 18. Welche Umkehrung gestattet der vorige Satz in Bezug auf die Aehnlichkeitsbedingungen?

Antwort. 1) Als Umkehrung des vorigen Lehrsatzes erhält man die Folgerung, dass man zum Nachweis der Aehnlichkeit zweier Dreiecke nicht immer die Gleichheit der Verhältnisse zwischen Seiten selbst, sondern auch zwischen irgend entsprechenden ähnlich liegenden Strecken benützen kann. Denn aus der Proportionalität von Höhen, Radien u. s. w. folgt rückwärts ebenso durch Aehnlichkeit entsprechender Teildreiecke auch wieder die Proportionalität der Seiten selbst und Gleichheit der Winkel — also die Aehnlichkeit.

2) Werden aber auf solche Weise die Bedingungen der Aehnlichkeit erweitert, so können ebenso auch die Bestimmungsstücke für Konstruktion erweitert werden. Und wie oben in den Antworten der Fragen 5 bis 9 Dreiecke eindeutig bestimmt waren durch entsprechende Seitenverhältnisse, Winkel, und die Grösse einer einzelnen Seite, so können nunmehr Dreiecke eindeutig bestimmt werden, wenn zwei Verhältnisse zwischen ähnlich liegenden Strecken nebst einer

Erkl. 51. Unter Benutzung der nebenstehenden Ergebnisse ist z. B. der Nachweis zu führen, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn in ihnen gleichgross ist das Verhältnis zwischen der Mittellinie und Winkelhalbierenden an der entsprechenden Ecke und etwa der Winkel zwischen der kleinern dieser beiden Strecken und der geschnittenen Seite nach Grösse und Lage. Denn aus der Aehnlichkeit der Teildreiecke (mw) folgt Gleichheit aller Winkel (mc) und (wc), daraus Aehnlichkeit der beiderseitigen Teildreiecke — und hieraus die Proportionalität der Seiten selbst und Gleichheit der Winkel.

Erkl. 52. Ebenso ist z. B. ein Dreieck eindeutig bestimmt, wenn wie oben, gegeben ist das Verhältnis zwischen der Mittellinie und Winkelhalbierenden an einer Ecke, der Winkel zwischen einer dieser Linien und einer anstossenden Seite, nebst der Länge etwa einer beliebigen Höhe. Denn man braucht nur unter sämtlichen ähnlichen Dreiecken, welche der obigen Bedingung genügen, ein solches (durch Konstruktion oder Rechnung) herauszusuchen, für welches die bezeichnete Höhe den verlangten Wert hat.

einzigen Streckengrösse gegeben sind. (Man vergleiche hier auch die in Aufgabe 26 am Schluss dieses Teiles aufgestellten Einschränkungen der Allgemeingültigkeit dieser Ergebnisse.)

Frage 19. In welcher Beziehung stehen die Flächen ähnlicher Dreiecke?

Erkl. 53. Derselbe Satz in der einfachsten Gestalt ist bereits als Satz 19 im V. Teile dieses Lehrbuches gefunden worden. Dort ergab sich aus anderen Ueberlegungen $\triangle : \triangle' = a \cdot b : a' \cdot b'$, und wegen $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$ folgte $\triangle : \triangle' = a^2 : a'^2$.

Erkl. 54. Man beachte die Uebereinstimmung in den Dimensionen: Aehnlich liegende Streckengrössen verhalten sich wie entsprechende Längen, entsprechende Flächengrössen aber wie die Quadrate entsprechender Längen. (In richtiger Fortsetzung müssen sich entsprechende Körpergrössen wie die Kuben entsprechender Längen verhalten.)

Antwort. Ist der Inhalt des eines Dreiecks $\frac{g \cdot h}{2}$, des andern $\frac{g' \cdot h'}{2}$, so verhalten sich beide Grössen wie $gh : g'h'$ oder $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{h}{h'}$. Nun ist aber nach Antwort der Frage 17 $\frac{h}{h'} = \frac{g}{g'}$, also wird $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{g}{g'} = \frac{g^2}{g'^2}$ oder $\triangle : \triangle' = g^2 : g'^2$.

Man erhält also die Aussage:

Satz 8. Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate je zweier entsprechenden Seiten (also allgemein je zweier ähnlich liegenden Strecken).

Frage 20. Welche Eigentümlichkeit zeigen die Schnittwinkel zwischen irgend welchen Seiten oder beliebigen Linien eines Dreiecks mit den entsprechenden ähnlich liegenden eines ähnlichen Dreiecks?

Erkl. 55. Der Beweis für Satz 38 des II. Teiles geschieht am einfachsten dadurch, dass man zu den Schenkeln der beiden Winkel, deren Gleichheit man zu beweisen wünscht, durch einen beliebigen Punkt O Parallele zieht. Dann ergibt eine einfache Subtraktion der als gleich bekannten Winkelgrössen vom grössten Winkel der entstehenden Figur auch die Gleichheit der zu untersuchenden Winkel.

Erkl. 56. Man kann nebenstehenden Satz auch so aussprechen: Bilden irgend zwei entsprechende Linien zweier ähnlichen Dreiecke einen gewissen Winkel miteinander, so bilden je zwei entsprechende Linien beider Dreiecke denselben Winkel.

Also erhält man insbesondere: Sind irgend zwei entsprechende Linien zweier ähnlichen Dreiecke zu einander parallel oder zu einander senkrecht, so sind sämtliche entsprechenden Linien beider Dreiecke zu einander parallel oder zu einander senkrecht.

Der erstere dieser beiden Fälle wird später in Antwort der Frage 22 und Abschnitt 5 noch besonders zur Geltung kommen.

Antwort. Nach Lehrsatz 38 des II. Teiles dieses Lehrbuches bilden von den Schenkeln zweier gleichgrossen Winkel das erste Schenkelpaar denselben Winkel wie das zweite. Nun bilden aber nach Satz 7 Seiten und beliebige Linien eines Dreiecks miteinander gleichgrosse Winkel, wie die entsprechenden ähnlich liegenden eines ähnlichen Dreiecks. Folglich werden Seiten und beliebige Linien eines Dreiecks von den entsprechenden ähnlich liegenden irgend eines ähnlichen Dreiecks unter stets gleichgrossem Winkel geschnitten.

Frage 21. Welche wichtige Folgerung gestattet die vorige Antwort?

Anwort. Das Ergebnis der vorigen Antwort liefert folgende wichtige Umkehrung:

Satz 9. Wenn in zwei Dreiecken drei einander entsprechende Geraden paarweise denselben Winkel miteinander bilden, so sind die Dreiecke ähnlich.

Oder für speziellen Fall ausgedrückt:

Satz 9a. Wenn die drei Seiten zweier Dreiecke entweder paarweise parallel oder paarweise senkrecht sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Erkl. 57. Die nebenstehende Umkehrung ist noch wichtiger als der vorhergehende Satz selbst. Derselbe Satz gilt nicht nur für die Seiten des Dreiecks, sondern für beliebige drei ähnlich liegende Strecken zweier Dreiecke; er kommt allerdings für die Seiten selbst, und zwar gerade in der besondern Form Satz 9a, am häufigsten vor.

Der Beweis kann als Umkehrungsbeweis indirekt geführt werden, oder auch direkt nach Satz 37 des zweiten Teiles, und zwar ebenfalls nach der in Erkl. 55 angegebenen Weise. (Man vergleiche auch Aufgabe 26 am Schlusse dieses Teiles.)

Frage 22. Zu welchem Ergebnis gelangt man nach Satz 9, wenn zwei beliebige ähnliche Dreiecke in diejenige Lage gebracht werden, dass irgend zwei entsprechende Seiten parallel sind?

Antwort. Bringt man die Dreiecke $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$ in Figur 5 und 6 in die Lage, dass $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, so muss wegen der Winkelgleichheit $\alpha_1 = \alpha_2$ auch $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ und wegen $\beta_1 = \beta_2$ auch $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ werden. Und zwar wird bei allen dreien die Parallelität gleichlaufend oder ungleichlaufend, wenn bei der ersten Seite AB das eine oder das andere zutraf.

Verbindet man nun in jedem dieser beiden Fälle die entsprechenden Eckpunkte A_1A_2 und B_1B_2, so entsteht ein Schnittpunkt S, für welchen nach Satz 2 und 3 des VI. Teiles die Beziehung gilt:

$$A_1S : A_2S = B_1S : B_2S = A_1B_1 : A_2B_2$$

also:

$$= a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \cdots = x.$$

Verbindet man ferner C_1 und C_2 und schneidet diese Linie mit einer der vorigen, etwa A_1A_2, so wird auch für den neuen Schnittpunkt:

$$A_1S : A_2S = C_1S : C_2S = A_1C_1 : A_2C_2,$$

also ebenfalls:

$$= a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \cdots = x.$$

Folglich muss der neue Schnittpunkt S mit dem vorigen Schnittpunkt S zusammenfallen.

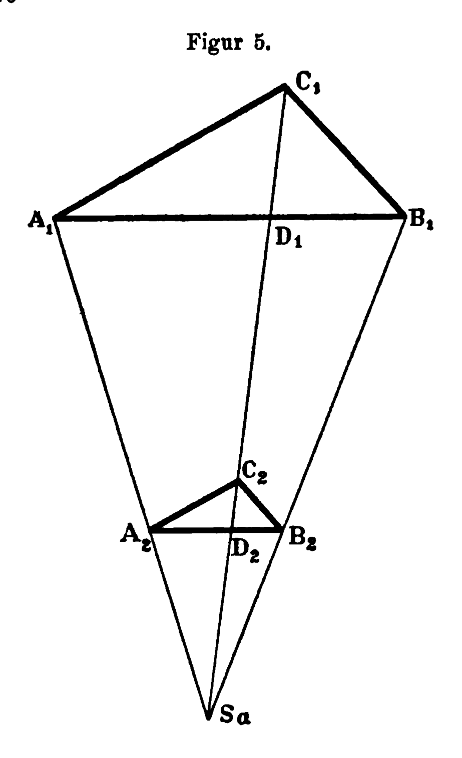
Dieser gemeinsame Schnittpunkt S der Linien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 heisst

Erkl. 58. Dass alle drei Verbindungslinien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch denselben Punkt S gehen, kann man aus Satz 3a des vorigen VI. Teiles schliessen. Denn danach müssen die Endpunkte C_1, C_2 der Parallelen $A_1C_1 \parallel A_2C_2$ auf derjenigen Geraden liegen, welche die Strecke A_1A_2 in gleichem Verhältnis teilt, wie $A_1C_1 : A_2C_2$. Dies gilt vom Punkte S, also geht auch C_1C_2 durch S.

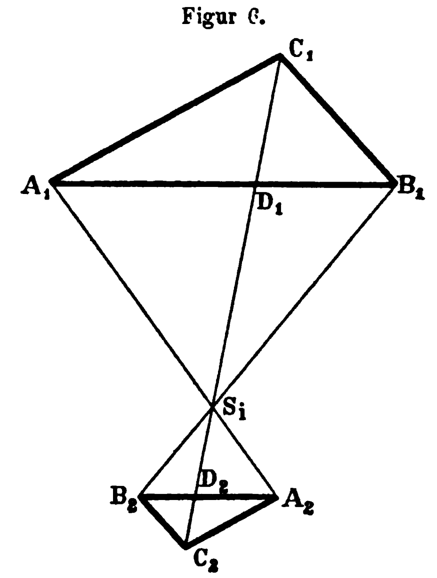
Erkl. 59. Man erkennt leicht, dass Figur 5 und 6 sich decken mit der Figur 14 des vorigen VI. Teiles, indem S der Scheitel des Winkels ist, dessen Strahlen SA, SB, SC auf den Parallelen die proportionalen Stücke ausschneiden; und zwar gilt Figur 5 für den Fall, dass beide Parallelen im gleichen Winkelraume liegen, Figur 6 für denjenigen, dass dieselben im Winkel und Scheitelwinkel liegen.

Erkl. 60. Die vorstehende Erklärung der Figuren 5 und 6 kann auch als Definition der Aehnlichkeit überhaupt verwendet werden. Man bezeichnet demnach Dreiecke dann als ähnlich, wenn sie in diejenige Lage gebracht werden können, dass die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch denselben Punkt gehen, und die Abstände derselben von diesem Scheitel ein bestimmtes gleichbleibendes Verhältnis haben. Wird diese Definition zu Grunde gelegt, so lässt sich wieder mittels derselben Sätze 2 und 3 des vorigen VI. Teiles die Proportionalität aller Seiten und Gleichheit aller Winkel nachweisen. Ferner folgt, dass

Figur 5.



Figur 6.



die Möglichkeit der Herstellung solcher Lage der Dreiecke vorhanden ist:

1) bei Proportionalität aller drei Seiten,

2) bei Proportionalität zweier Seiten und Gleichheit des eingeschlossenen Winkels,

3) bei Proportionalität zweier Seiten und Gleichheit des der grösseren gegenüberliegenden Winkels,

4) bei Gleichheit aller drei Winkel.

Erkl. 61. Die Verbindungsstrecke je zweier entsprechenden Punkte wird vom äussern Aehnlichkeitspunkte äusserlich geteilt im Verhältnis $a_1 : a_2$, vom innern Aehnlichkeitspunkt innerlich geteilt in demselben Verhältnis $a_1 : a_2$. Und diese Beziehung bleibt bestehen für jegliche Lage der ähnlichen Figuren zu einander, bezw. der Aehnlichkeitspunkte zu den beiden Figuren. Die gegenseitige Lage der Dreiecke in Figur 5 und 6 nennt man die „perspektivische Lage“, im Vergleich dazu heisst jede andere Lage zweier ähnlichen Figuren die schiefe Lage.

Aehnlichkeitspunkt für die beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$. Sind A_1B_1 und die anderen Seiten gleichlaufend parallel A_2B_2 und den anderen, so liegt S ausserhalb der Verbindungsstrecke je zweier entsprechenden Punkte und heisst äusserer Aehnlichkeitspunkt S_a (siehe Figur 5). Sind aber A_1B_1 und die anderen Seiten ungleichlaufend parallel A_2B_2 und den anderen, so liegt S innerhalb der Verbindungsstrecke je zweier entsprechenden Punkte und heisst innerer Aehnlichkeitspunkt S_i (siehe Figur 6).

Für jeden dieser Punkte aber gilt:

$$A_1S : A_2S = B_1S : B_2S = C_1S : C_2S = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = x.$$

Dagegen ist einzeln für den äussern Aehnlichkeitspunkt:

$$A_1S_a : A_2S_a : A_1A_2 = a_1 : a_2 : (a_1 - a_2),$$

dagegen für den innern Aehnlichkeitspunkt:

$$A_1S_i : A_2S_i : A_1A_2 = a_1 : a_2 : (a_1 + a_2).$$

Frage 23. Wie lässt sich mittels voriger Antwort der allgemeine Satz 7 anders beweisen?

Erkl. 62. Aehnliche Dreiecke entstehen in Figur 5 und 6 eine ganze Reihe noch ausser $A_1B_1C_1 \backsim A_2B_2C_2$. Aehnlich werden nämlich —

Antwort. Um den Satz 7, welcher die Ergebnisse der ihm vorhergehenden Antworten in sich schliesst, nach Figur 5 oder 6 zu beweisen, bringt man die zu behandelnden Dreiecke erst in die Lage

nach welchem Aehnlichkeitssatze man auch prüfen will — die Dreieckspaare für beide Figuren:

$$A_1SB_1 \sim A_2SB_2, \quad B_1SC_1 \sim B_2SC_2, \quad C_1SA_1 \sim C_2SA_2.$$

Ferner, wenn mit D beidemale der (in beiden Figuren nicht identische) Schnittpunkt von c mit C_1C_2 bezeichnet wird:

$$A_1SD_1 \sim A_2SD_2, \quad B_1SD_1 \sim B_2SD_2;$$

aber auch:

$$A_1D_1C_1 \sim A_2D_2C_2 \text{ und } B_1D_1C_1 \sim B_2D_2C_2.$$

Erkl. 63. Die früher (Erkl. 50) gegebene Erklärung ähnlich liegender Elemente beider Dreiecke lässt jetzt die einfachere Ausdrucksweise zu, dass ähnlich liegende Punkte auf derselben Geraden durch S und im bestimmten Abstandsverhältnis $a_1 : a_2$ von demselben entfernt liegen. Aehnlich liegende Geraden sind je zwei Verbindungslinien ähnlich liegender Punkte.

$A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ dieser Figur. Dann bilden die entsprechenden Linien der einen und andern Figur von selbst ähnliche Dreiecke mit dem Scheitel S, so dass ohne weiteres auch die Verhältnisgleichheit einleuchtet. Denn Linien mit gleichen Winkeln gegen entsprechende Seiten werden parallel, Punkte, welche entsprechende Seiten in gleichen Verhältnissen haben, werden „ähnlich liegende Punkte“. Auf beide Arten entstehen immer wieder ähnliche Teildreiecke mit dem Scheitel S, und aus diesen ergibt sich die Proportionalität der entsprechenden Strecken bezw. Gleichheit entsprechender Winkel.

Frage 24. Zu welcher Zweiteilung des Aehnlichkeitsbegriffs gelangt man durch Vergleichung der Figuren 5 und 6?

Antwort. Vergleicht man die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ der Figur 5 und 6 in Bezug auf ihre Umlaufsrichtung, so findet man, dass der Umlauf $A - B - C$ sowohl bei $A_1B_1C_1$ als auch bei $A_2B_2C_2$ jedesmal der positive ist, d. h. gegen den Uhrzeiger. Nun bleibt aber die Aehnlichkeit bestehen, wenn eines der Dreiecke umgeklappt wird — nicht aber die Einheit des Punktes S. Wird aber ein Dreieck umgeklappt, so ändert sich dadurch seine Umlaufsrichtung. Man unterscheidet demnach gleichlaufend ähnliche Dreiecke und ungleichlaufend ähnliche Dreiecke, oder allgemein gleichlaufende und ungleichlaufende Aehnlichkeit — je nachdem der Umlauf durch die einander entsprechenden Stücke beider Dreiecke in gleicher oder ungleicher Richtung geschieht. Von zwei ungleichlaufend ähnlichen Figuren muss man die eine erst umklappen, um dieselben in die in Figur 5 oder 6 dargestellte gegenseitige Lage bringen zu können; denn in perspektivische Lage können durch Drehung allein nur gleichlaufend ähnliche Dreiecke gelangen, so dass deren Seiten entweder sämtlich gleichlaufend parallel (äusserer Aehnlichkeitspunkt) oder sämtlich ungleichlaufend parallel sind (innerer Aehnlichkeitspunkt).

Erkl. 64. Dieselbe Unterscheidung wie nebenstehend wurde schon beim Kongruenzbegriff vorgefunden (siehe die Antworten der Fragen 12 und 13, sowie Erkl. 242 bis 247 des III. Teiles); gleichlaufend kongruente Figuren können zur Deckung gebracht werden durch Parallelverschiebung und Drehung allein, ungleichlaufend kongruente Figuren bedürfen ausser Parallelverschiebung und Drehung auch noch der Umklappung, um zur Deckung gebracht werden zu können.

Ebenso gelangen gleichlaufend ähnliche Figuren in die Lage der Figur 5 und 6 schon durch Drehung allein, ungleichlaufend ähnliche Figuren erst durch Drehung in Verbindung mit Umklappung. (Parallelverschiebung ist überhaupt nicht nötig, um die Lage der Figur 5 und 6, die sog. „perspektivisch ähnliche Lage“ hervorzubringen.)

Erkl. 65. Dass Dreieck $A_2B_2C_2$ der Figur 6 nicht etwa das umgekehrte Dreieck $A_2B_2C_2$ der Figur 5 ist, erkennt man daraus, dass der kleinste Winkel α in Figur 5 links, in Figur 6 rechts liegt, dass also der Durchlauf der grössten Seite A_2B_2 in Figur 5 von links nach rechts, in Figur 6 dagegen von rechts nach links stattfindet — und dabei bleibt jedesmal der Innenraum des Dreiecks zur Linken.

3) Ueber die Anwendung der Aehnlichkeit auf die besonderen Dreiecke.

Frage 25. Welche Abänderung erfahren die vier Aehnlichkeitssätze für das gleichschenklige Dreieck?

Antwort. Im gleichschenkligen Dreieck sind zwei gleiche Seiten und zwei gleiche Winkel. Die erstere dieser beiden Beziehungen stellt aber eine Angabe dar über das Verhältnis zweier Seiten, sie besagt nämlich, das Verhältnis sei gleich 1. Daher stimmen sämtliche gleichschenkligen Dreiecke überein in einem Seitenverhältnis, nämlich dem der beiden Schenkel, welches immer gleich der Einheit ist.

Der Name des gleichschenkligen Dreiecks ersetzt also in den vier Aehnlichkeitssätzen allein die Gleichheit eines Seitenverhältnisses innerhalb jedes Dreiecks bezw. die Gleichheit des Verhältnisses zweier Seitenpaare zwischen beiden Dreiecke, und zur Herbeiführung der Aehnlichkeit braucht nur der Rest der Bedingungen nach diesem Abzug erfüllt zu werden. Daher verbleibt im ersten Aehnlichkeitssatze noch die Gleichheit des Verhältnisses der dritten Seite, nämlich der Basis zu einer (also zu beiden) vorigen; im zweiten Aehnlichkeitssatze die Gleichheit des eingeschlossenen Winkels, also des Scheitelwinkels; im dritten Aehnlichkeitssatze die Gleichheit des Gegenwinkels eines der Schenkel (denn da beide gleichgross, ist keiner der grössere). Der vierte Aehnlichkeitssatz erfährt keine Aenderung nach dieser Weise, da in ihm kein Seitenverhältnis vorkommt; vielmehr fällt er ganz fort, da gar nicht die Grösse zweier Winkel willkürlich bleibt, vielmehr die Sätze II und III bereits aussagen, dass Gleichheit eines entsprechend liegenden Winkels die Aehnlichkeit herbeiführt. Man erhält also:

Satz 10. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen gleichgross ist:

Erkl. 66. Sind $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$ die Seiten zweier gleichschenkligen Dreiecke in der gewöhnlichen Bezeichnung, so ist stets $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. Also kann man entweder setzen:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = 1$$

und dann muss als weitere Aehnlichkeitsbedingung hinzukommen $a_1 : c_1 = a_2 : c_2$. Oder man setzt $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ (und diesen Bruch nicht gleich 1, sondern gleich dem öfters gebrauchten Proportionalitätsfaktor x) und dann ist die dritte Bedingung $c_1 : c_2 = a_1 : a_2 = x$.

Erkl. 67. Da im gleichschenkligen Dreieck durch die Grösse eines Winkels die Grösse aller drei bestimmt ist, so kann man nach Ableitung der ersten Aehnlichkeitsbedingung, wie im Nebenstehenden, auch so weiterfahren: Alle Aehnlichkeitssätze, in denen Winkelgleichheiten vorkommen, fallen in den einen zusammen:

Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich ist dem gleichliegenden des andern.

Denn solche Gleichheit eines Winkels bedingt Gleichheit aller drei Winkel des gleichschenkligen Dreiecks.

Erkl. 68. Man könnte aus dem vierten Aehnlichkeitssatze als Umkehrung die andern ableiten: Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn unter seinen Winkeln die Bedingung besteht α oder $\beta = 90 - \frac{\gamma}{2}$ oder $\gamma = 180 - 2\alpha$ oder $180 - 2\beta$. — Selbstverständlich lässt sich auch die Gültigkeit des Satzes 7 für gleichschenklige Dreiecke ebenfalls aussprechen, unter der einzigen Bedingung der Gleichheit eines entsprechend liegenden Winkels beider Dreiecke, oder des Verhältnisses zwischen Schenkel und Basis.

1) Das Verhältnis zwischen Schenkel und Grundseite,

oder:

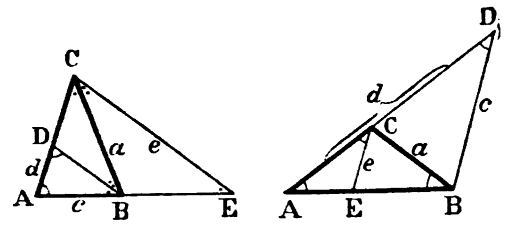
2) der Winkel an der Spitze,

oder:

3) ein Winkel an der Grundseite.

Frage 26. Welche Besonderheiten des gleichschenkligen Dreiecks liefert die Anwendung der Frage 12?

Figur 7.



Erkl. 69. Man hat zu unterscheiden, ob der Winkel am Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks kleiner oder grösser als der an der Basis, also kleiner oder grösser als 60° ist. Im ersteren Falle kommt die Antiparallele durch B innerhalb, im letzteren ausserhalb des Dreiecks zu liegen, und umgekehrt jene durch C. Jedesmal entsteht auf AC eine Grundseite $d = AD$ eines gleichschenkligen Dreiecks ADB mit Schenkel $= c$ und auf AB ein Schenkel AE eines gleichschenkligen Dreiecks ACE mit Grundseite $= a$. In beiden Figuren 7 ist also der Scheitelwinkel $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD = \sphericalangle AEC$, also der Basiswinkel $BAC = ABC$ gleich $BAD = ADB$ gleich $EAC = ECA$. Folglich:

$$\triangle ABC \sim DAB \sim CAE.$$

Jedesmal muss also das Verhältnis zwischen Schenkel und Basis dasselbe sein, nämlich:

$$a : c = c : d = e : a.$$

Hieraus folgt einzeln $c^2 = a \cdot d$ und $a^2 = c \cdot e$. Dasselbe lässt sich folgern aus der Aehnlichkeit $BCD \sim CEB$.

Antwort. 1) Mit Beibehaltung der Schenkelseiten kann durch eine Parallele zur Basis ein dem ganzen Dreieck ähnliches abgeschnitten werden. Denn eine Antiparallele zur Grundseite würde wegen der Gleichheit der Basiswinkel mit einer Parallelen zusammenfallen.

2) Mit Beibehaltung von Grundseite und Schenkel dagegen kann man durch Parallele und Antiparallele zum andern Schenkel ähnliche Dreiecke abschneiden.

Legt man insbesondere die Antiparallele durch einen der Schenkelendpunkte, so wird die Grundseite zum geometrischen Mittel zwischen Schenkel und neuentstehender Basis; dagegen der Schenkel zum geometrischen Mittel zwischen Basis und neuentstehendem Schenkel, nämlich in Figur 7 in beiden Fällen:

$$\overline{AB}^2 = AC \cdot AD$$

und

$$\overline{AC}^2 = AB \cdot AE \text{ (siehe Erkl. 69).}$$

(Durch Multiplikation wird hieraus u. a.:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE,$$

wie schon aus der Proportion $c : d = e : a$.)

Frage 27. Welche Eigentümlichkeit ergibt sich aus Figur 7, wenn der Winkel γ gleich 36° ist?

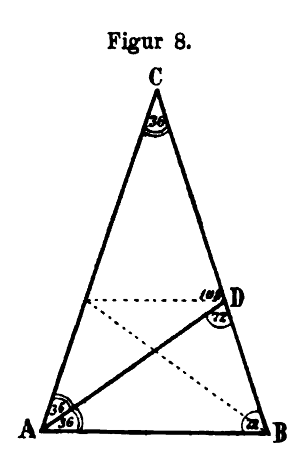
Erkl. 70. Das in Figur 8 dargestellte Dreieck wurde schon in Aufgabe 127 des III. Teiles auf seine Winkelbeziehungen untersucht. Da ein 10maliges Antragen desselben Dreiecks um den Punkt C herum gerade den Vollwinkel C mit 360° ausfüllt, so liegen die 10 Punkte $A, B, \cdots$ in gleichen Abständen $= c$ auf dem

Antwort. Ist der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ABC in Figur 8 gleich 36°, und man zieht durch A die Antiparallele zu AC im Winkel β, so muss auch $\sphericalangle BAD = 36^0$ sein. Nun hat aber $\sphericalangle \alpha$ selbst 72°, also wird AD dessen Winkelhalbierende. Demnach wird in Figur 8:

$$36^0 = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD,$$

Umfang eines Kreises. Folglich ist c die Seite eines regelmässigen Zehnecks im Kreise mit Radius a. Und da die Zehnteilung des Kreises sonst nicht möglich ist, so liefert die nebenstehende Ueberlegung ein Mittel, um aus der Beziehung $c^2 = a(a-c)$ den Winkel von 36^0 und das Zehneck zu finden.

Figur 8.



folglich Dreieck ADC gleichschenklig und

$$BA = AD = CD = c,$$

so dass:

$$d = BD = CB - CD = a - c.$$

Die Formel $c^2 = a \cdot d$ in voriger Antwort gibt also $c^2 = a(a-c)$. Dies ist aber nach Antwort der Frage 68 des VI. Teiles der Ausdruck der Beziehung, dass die Basis c der goldene Abschnitt des Schenkels a ist.

Frage 28. Welche Anwendung erfahren die vier Aehnlichkeitssätze auf das gleichseitige Dreieck?

Erkl. 71. Das Verhältnis der drei Seiten untereinander ist gleich der Einheit $1:1:1$; das Verhältnis zweier Seiten ist $1:1=1$ und sowohl der eingeschlossene, als der gegenüberliegende Winkel jedesmal gleich 60^0, da alle drei Winkel stets 60^0 betragen. Die Bedingungen aller vier Sätze sind also durch den Namen des gleichseitigen Dreiecks allein erfüllt.

In Satz 10 wird:

1) $a:c = a':c' = 1.$

2) $\gamma = \gamma' = 60^0.$

3) $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 60^0.$

Antwort. Da in allen gleichseitigen Dreiecken sämtliche Winkel und Seiten untereinander gleich sind, so liefern alle vier Aehnlichkeitssätze in gleicher Weise das Ergebnis:

Gleichseitige Dreiecke sind stets ähnlich.

Zeichnet man also zwei solche Dreiecke, deren eines doppelt so grosse Seiten hat als ein anderes, so ist auch Höhe und jede andere entsprechende Strecke doppelt so gross, der Inhalt viermal so gross u. s. w.

Frage 29. Welche Abänderung erfahren die vier Aehnlichkeitssätze für das rechtwinklige Dreieck?

Erkl. 72. Die Zweideutigkeit des dritten Aehnlichkeitssatzes ist beim rechtwinkligen Dreieck ausgeschlossen, da in demselben stets ein rechter Winkel vorhanden, und kein grösserer als dieser möglich ist.

Antwort. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Grösse eines Winkels fest bestimmt. Der Namen des rechtwinkligen Dreiecks ersetzt also in den vier Aehnlichkeitssätzen allein die Gleichheit eines Winkelpaares zwischen beiden Dreiecken, und zur Herbeiführung der Aehnlichkeit braucht nur der Rest der Bedingungen nach diesem Abzug erfüllt zu werden. Daher verbleibt im zweiten Aehnlichkeitssatze noch die Gleichheit des Verhältnisses der einschliessen-

den Seiten, also der beiden Katheten gegeneinander; im dritten Aehnlichkeitssatze die Gleichheit des Verhältnisses der Gegenseite zu einer andern, also der Hypotenuse gegen eine der Katheten; im vierten Aehnlichkeitssatze die Gleichheit eines weiteren spitzen Winkels. Der erste Aehnlichkeitssatz erfährt keine Aenderung dieser Weise, da in ihm keine Winkelgrösse vorkommt; vielmehr fällt er ganz fort, da gar nicht die Grösse zweier Seitenverhältnisse innerhalb desselben Dreiecks willkürlich bleibt, vielmehr nach dem pythagoreischen Lehrsatze $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, also:

$$a : b : c = a : b : \sqrt{a^2 + b^2} = a : \sqrt{c^2 - a^2} : c = \sqrt{c^2 - b^2} : b : c.$$

Man erhält also:

Satz 11. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen gleichgross ist:

1) das Verhältnis zwischen beiden Katheten

oder:

2) das Verhältnis zwischen der Hypotenuse und einer Kathete

oder:

3) die Grösse eines der spitzen Winkel.

Erkl. 73. Wie aus nebenstehenden Formeln einleuchtet, ist das Verhältnis der dritten Seite zu den beiden andern bestimmt, sowie man das zwischen irgend zweien derselben kennt. Umgekehrt kann man daraus den Satz aufstellen: Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn seine drei Seiten sich verhalten, wie $a : b : \sqrt{a^2 + b^2}$.
Man könnte also auch sagen, dass durch die Festlegung des rechten Winkels ein zweites Seitenverhältnis bestimmt wird, sowie das erste bekannt ist; und so deckt sich dann wieder der erste Aehnlichkeitssatz mit den beiden ersten Bedingungen des nebenstehenden Satzes.

Erkl. 74. Stellt man für das gleichschenklige und das rechtwinklige Dreieck die übrigbleibenden Aehnlichkeitsbedingungen nach den vier Aehnlichkeitssätzen zusammen, so erhält man folgende Uebersicht:

		Gleichschenkliges Dreieck (2 Seitenverhältnisse fest)	Rechtwinkliges Dreieck (1 Winkel fest)
I. Aehnlichkeitssatz:	3 Seitenverhältnisse	Schenkel zu Grundseite	—
II. Aehnlichkeitssatz:	2 Seitenverhältnisse und 1 eingeschlossener Winkel	Winkel an der Spitze	Kathete zu Kathete
III. Aehnlichkeitssatz:	2 Seitenverhältnisse und 1 gegenüberliegender Winkel	Winkel an der Grundseite	Hypotenuse zu Kathete
VI. Aehnlichkeitssatz:	2 Winkel	—	1 spitzer Winkel

Frage 30. Welche Besonderheiten des rechtwinkligen Dreiecks liefert die Anwendung der Frage 12?

Antwort. 1) Wenn die beiden Katheten beibehalten werden, so entsteht durch die Parallele zur Hypotenuse ein gleichlaufend ähnliches, durch die Antiparallele ein ungleichlaufend ähnliches Dreieck, dessen kleinere Kathete auf der vorigen grösseren liegt und umgekehrt. Geht insbesondere die Antiparallele durch einen Endpunkt der

Erkl. 75. Wird AE antiparallel AB gemacht, so geschieht dies durch Abtragung des Winkels β an AC, ebenso BD antiparallel AB, indem Winkel α an CB abgetragen wird —

oder auch einfach durch eine Parallele zu AE durch Ecke B. Dann ist also:

$$\sphericalangle \alpha = BAC = DBC = AEC$$

und

$$\sphericalangle \beta = ABC = BDC = EAC.$$

Folglich ist der Umlauf der drei wegen Winkelgleichheit ähnlichen Dreiecke nach den Winkeln α, β, 90^0 bei ABC positiv, bei BDC und EAC dagegen negativ. Und aus der Aehnlichkeit:

$$ABC \sim BDC \sim EAC$$

folgt:

$$BC:CA:AB = DC:CB:BD = AC:CE:EA$$

oder: $a:b:c = d:a:BD = b:e:AE$. Also hieraus einzeln:

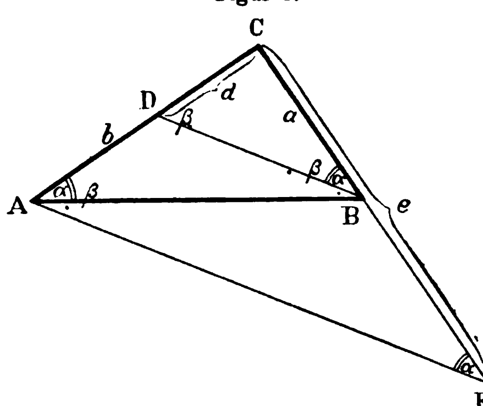
$a:b = d:a$ oder $a^2 = b \cdot d$

$a:b = b:e$ oder $b^2 = a \cdot e$

$a : c = b : AE$ oder $AE = \frac{b \cdot c}{a}$

$b:c = a:BD$ oder $BD = \frac{a \cdot c}{b}$.

Figur 9.



Hypotenuse, so wird ähnlich wie in Antwort der Frage 26 jede Kathete des ursprünglichen Dreiecks geometrisches Mittel zwischen der andern Kathete und deren neuentstehendem Abschnitt:

$$a^2 = b \cdot d, \quad b^2 = a \cdot e$$

in Figur 9; und die ursprüngliche und neue Hypotenuse verhalten sich wie die Katheten:

$$AB:AE = a:b, \quad AB:BD = b:a,$$

also durch Multiplikation $c^2 = AE \cdot BD$.

2) Wenn die Hypotenuse und eine Kathete beibehalten werden, so entstehen wieder durch Parallele zur zweiten Kathete gleichlaufend ähnliche, durch die Antiparallele ungleichlaufend ähnliche Dreiecke. Die Antiparallele hat aber die besondere Eigenschaft, dass sie zur Hypotenuse senkrecht ist. Geht sie durch einen Kathetenendpunkt, so entsteht eine ganze Reihe ähnlicher Dreiecke, weil **beide** Teildreiecke denselben Winkel erhalten, wie das ganze. Daraus ergeben sich wieder analoge Beziehungen wie oben in grösserer Anzahl.

Erkl. 76. Ausserdem ist in Figur 9 wegen der Winkelgleichheiten $BAD = AEB$ und (als Wechselwinkel)

$$ABD = EAB, \text{ auch } \triangle ABD \sim EAB,$$

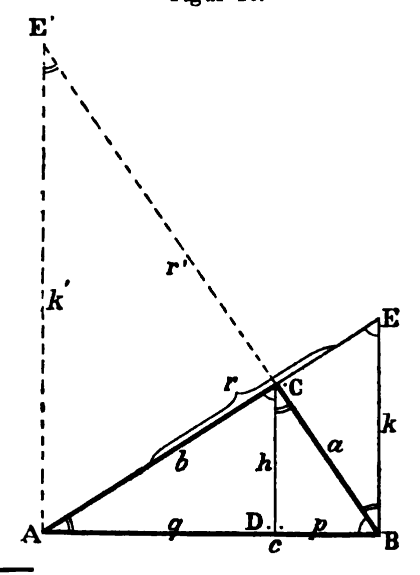
also:

$$c:BD:(b-d) = AE:c:(e-a).$$

Folglich wie auch obenstehend $c^2 = AE \cdot BD$, d. h. die Hypotenuse ist das geometrische Mittel zwischen ihren beiden Antiparallelen durch ihre Endpunkte.

Erkl. 77. In Figur 10 ist die Lage der ähnlichen Dreiecke eine sehr verschiedene. Jede Seitenrichtung des ursprünglichen Dreiecks erscheint in den neuentstehenden ähnlichen Dreiecken in anderer Lage: kleinere Kathete, grössere Kathete, Hypotenuse, Höhe, Hypotenusenabschnitt.

Figur 10.



Frage 31. Welche wichtigen Beziehungen ergeben sich aus dem zweiten Teile der vorigen Antwort?

Antwort. Ist ABC in Figur 10 das rechtwinklige Dreieck, so wird im Winkel α mit BC die Antiparallele CD zur Höhe h, so dass deren Abschnitte auf der Hypotenuse zu den Projektionen der Katheten werden, die Antiparallele BE senkrecht in B. Daher sind ähnliche Dreiecke:

$$ABC \sim ACD \sim CBD \sim AEB \sim BEC.$$

Und hieraus:

$$BC:CA:AB = CD:DA:AC = BD:DC:CB = EB:BA:AE = EC:CB:BE,$$

oder:

$$a:b:c = h:q:b = p:h:a = k:c:r = (r-b):a:k,$$

also einzeln hervorzuheben als Beziehungen zwischen bloss drei Grössen:

1) $a^2 = c \cdot p$ \} zusammen $a^2 + b^2 = c^2$
2) $b^2 = c \cdot q$ \} oder auch $a^2 : b^2 = p : q$,
3) $h^2 = p \cdot q$,
4) $a^2 = b(r-b)$,
5) $c^2 = b \cdot r$,
6) $k^2 = r(r-b)$,
7) $a^2 = h \cdot k$.

Davon ergeben die drei ersten wieder die bekannten Beziehungen des pythagoreischen Lehrsatzes im Dreieck ABC, die drei nächsten dieselben im Dreieck AEB, nämlich:

Satz 12. Im rechtwinkligen Dreieck ist:

1) jede Kathete geometrisches Mittel zwischen der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf dieselbe;

2) die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat;

3) die Höhe geometrisches Mittel zwischen den beiden Hypotenusenabschnitten.

Dazu kommt als selbständige Beziehung (7), dass jede Kathete geometrisches Mittel ist zwischen den beiden Parallelstrecken durch ihre Endpunkte, welche zur Hypotenuse senkrecht sind.

In allen sieben ähnlichen Dreiecken der Figur 10 verhalten sich entsprechende

Erkl. 78. Abgetragen sind in Figur 10 die Winkel $ACD = \beta$, $ABE = \gamma = 90^0$. Daraus entstehen für diese fünf Dreiecke der Figur folgende Winkelgleichheiten:

$$\sphericalangle \alpha = BAC = CAD = BCD = EAB = EBC$$
$$\sphericalangle \beta = ABC = ACD = CBD = AEB = BEC$$
$$\sphericalangle \gamma = BCA = CDA = BDC = EBA = ECB = 90^0.$$

Folglich sind diese fünf Dreiecke ähnlich, und in allen stehen in gleichem Verhältnis: Kleine Kathete zur grössern Kathete zur Hypotenuse. Und zwar ist z. B. die Strecke $BC = a$ im Dreieck ABC kleine Kathete, in BEC grosse Kathete, in CBD Hypotenuse, in AEB Höhe, in $E'BA$ Hypotenusenabschnitt. Und umgekehrt z. B. die kleinere Kathete in $ABC = a$, in $ACD = h$, in $CBD = p$, in $AEB = k$, in $BEC = r - b$, in $E'BA = c$, in $E'AC = b$.

Erkl. 79. Zieht man die Antiparallelen im Winkel β statt im Winkel α, so fällt diejenige durch den Endpunkt C von b mit h zusammen, jene durch A gibt $AE' = k'$. So entstehen die zwei weiteren, ebenfalls mit den vorigen fünf Dreiecken ähnlichen Dreiecke $E'BA$ und $E'AC$. Für beide ergeben sich vollkommen analoge Beziehungen, wie für AEB und BEC, indem neben der Vertauschung von k und k', r und r' genau die Vertauschung von a und b in gleichem Schritt zu geschehen hat. Daher entstehen keine neuen Beziehungen durch Hinzunahme dieser beiden Dreiecke. Die nebenstehenden Beziehungen 4), 5), 6) gehen über in dieselben pythagoreischen Beziehungen im Dreieck $E'BA$. Beziehung 7) liefert $b^2 = h \cdot k'$, also durch Zusammenfassung $a^2 : b^2 = k : k'$.

Seiten und überhaupt ähnlich liegende Strecken ebenso, wie das für ein einzelnes Paar solcher Strecken der Fall ist, z. B. für die kleinere Kathete (siehe Erkl. 78). Dies Verhältnis ist also:

$$a:h:p:k:(r-b):c:b;$$

oder wenn a und b als gegebene Bestimmungsgrössen angesetzt werden, wie:

$$a:\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}:\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}:\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}:\frac{a^2}{b}:\sqrt{a^2+b^2}:b$$

(man vergleiche die Berechnung der Einzelgrössen in Antwort der Frage 43 des V. Teiles und Erkl. 81); mit a, b und c aber wie:

$$abc:ab^2:a^2b:ac^2:a^2c:bc^2:b^2c.$$

Erkl. 80. Unter den vielen Eigenschaften der obenstehenden Beziehungen zwischen den erstern fünf Dreiecken sind die aufgestellten Beziehungen 1) bis 7) die einzigen, in denen nur drei Grössen auftreten. Vier Grössen sind enthalten in folgenden Gleichungen, die zum Teil ebenfalls schon früher bekannt werden:

8) $a\cdot b=c\cdot h$ 13) $a\cdot b=q\cdot k$ 15) $h\cdot c=q\cdot k$
9) $a\cdot q=b\cdot h$ 16) $b\cdot c=q\cdot r$
10) $a\cdot h=b\cdot p$ 17) $p\cdot c=h\cdot k$
11) $a\cdot c=b\cdot k$ 14) $a\cdot c=h\cdot r$ 18) $h\cdot r=b\cdot k$
12) $a\cdot r=c\cdot k$ 19) $p\cdot r=a\cdot k$

Endlich Beziehungen zwischen fünf Grössen:

20) $a\cdot k=c(r-b)$ 23) $p\cdot a=h(r-b)$
21) $a\cdot h=q(r-b)$ 24) $p\cdot k=a(r-b)$
22) $h\cdot k=b(r-b)$.

Die entsprechenden Beziehungen für das sechste und siebente Dreieck entstehen durch die in voriger Erkl. 79 angegebenen Vertauschungen.

Erkl. 81. Aus Antwort der Frage 43 des V. Teiles weiss man, dass:

$$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad p=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Für k findet man aus obiger Beziehung 11) den Wert:

$$\frac{ac}{b}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$ (auch ebenso aus Beziehung 7);

für r aus Beziehung 14):

$$r=\frac{a\cdot c}{h}=\frac{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{ab}=\frac{a^2+b^2}{b}$$ (ebenso aus Beziehung 5);

also:

$$r-b=\frac{a^2+b^2}{b}-b=\frac{a^2+b^2-b^2}{b}=\frac{a^2}{b}.$$

Nimmt man als massgebende Bestimmungsgrössen statt beider Katheten a und b die Hypotenuse mit einer Kathete, etwa c und a, so wird dasselbe Verhältnis:

$$a:\frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{c}:\frac{a^2}{c}:\frac{ac}{\sqrt{c^2-a^2}}:\frac{a^2}{\sqrt{c^2-a^2}}:c:\sqrt{c^2-a^2}.$$

Man sieht, dass im Nenner dieser Verhältnissgrössen nur Seiten des Dreiecks vorkommen. Wird also mit diesen Nennern erweitert, so kommt jedesmal:

$$abc:ab^2:a^2b:ac^2:a^2c:bc^2:b^2c=1:\frac{b}{c}:\frac{a}{c}:\frac{c}{b}:\frac{a}{b}:\frac{c}{a}:\frac{b}{a}$$

(oder in trigonometrischer Ausdrucksweise $=1:\text{cosin}\,\alpha:\sin\alpha:\sec\alpha:\text{tg}\,\alpha:\text{cosec}\,\alpha:\text{ctg}\,\alpha$).

Zwischen dem ursprünglichen Dreieck und jedem andern bestehen demnach nur Verhältnisse gleich den sechs Brüchen zwischen den drei Seiten a, b, c. Im übrigen ist z. B. gleichgross das Verhältnis entsprechender Längen zwischen $\triangle ABC$ und BEC, $\triangle ACD$ und CBD, $\triangle E'AC$ und ABC, $\triangle E'BA$ und AEB, nämlich $= b:a$ (das Flächenverhältnis $= b^2:a^2$); ferner zwischen $\triangle ABC$ und AEB, $\triangle CBD$ und BEC, $\triangle ACD$ und ABC, $\triangle E'AC$ und $E'BA$, nämlich $= b:c$ (Flächenverhältnis $= b^2:c^2$); endlich zwischen $\triangle ABC$ und CBD, $\triangle AEB$ und BEC, $\triangle E'BA$ und ABC, $\triangle E'AC$ und ACD, nämlich $= c:a$ (Flächenverhältnis $= c^2:a^2$). Dieselben Schlüsse über Seitenverhältnisse liegen aber natürlich ebenso in der obigen zuerst aufgestellten fortlaufenden Proportion.

Frage 32. Welche Anwendung erfahren die vier Aehnlichkeitssätze auf das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck?

Antwort. Da in allen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken die drei Winkelgrössen festgelegt sind gleich 45°, 45°, 90°, auch das Verhältnis der drei Seiten ebenso festgelegt gleich $1:1:\sqrt{2}$, so liefern alle vier Aehnlichkeitssätze in gleicher Weise das Ergebnis:

Rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind stets ähnlich.

Zeichnet man also zwei solche, deren eines doppelt so grosse Kathete oder doppelt so grosse Hypotenuse hat als ein anderes, so ist auch Höhe und jede andere entsprechende Strecke doppelt so gross, der Inhalt viermal so gross u. s. w.

Erkl. 82. Da das Hypotenusenquadrat $c^2 = a^2 + a^2$ ist, so wird $c = a\sqrt{2}$, also:

$$a:b:c = a:a:a\sqrt{2} = 1:1:\sqrt{2};$$

da also auch die Winkelgrössen unveränderlich sind, so werden die Bedingungen aller vier Aehnlichkeitssätze durch den Namen des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks allein schon erfüllt.

In Satz 11 wird:

1) $a:b = a':b' = 1$,
2) $c:a = c':a' = \sqrt{2}$,
3) $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 45^0$.

Erkl. 83. Umgekehrt kann man aussagen: Ein Dreieck ist rechtwinklig-gleichschenklig, wenn seine drei Seiten sich verhalten wie $1:1:\sqrt{2}$.

Frage 33. Welche Anwendung der Frage 12 gestatten das gleichseitige und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck?

Antwort. 1) Im gleichseitigen Dreieck fällt in jedem Winkel die Antiparallele zur Gegenseite mit der Parallelen zusammen, so dass keinerlei neue Dreiecke entstehen. In Figur 7 fällt jedesmal D mit C und C mit B zusammen.

2) Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck findet im rechten Winkel dieselbe Beziehung statt. In Figur 9 fallen die Punkte D und E mit A und B zusammen.

3) Zieht man im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck die Antiparallele in einem der spitzen Winkel, so entstehen wieder die Höhe und die beiden Senkrechten in den Endpunkten der Hypotenuse. Figur 10 wird sym-

Erkl. 84. Die einzelnen Strecken der Antwort der Frage 31 an Figur 10 werden folgende:

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}};$$

$$c = k = k' = 2p = 2q = 2h = a\sqrt{2};$$

$$h = p = q = \frac{c}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2};$$

$$r = r' = 2a = c\sqrt{2} \text{ (also } r - b = a\text{)},$$

so dass, wie auch nachstehend abgeleitet:

$$a:h:p:k:(r-b):c:b$$
$$= 1:\frac{1}{2}\sqrt{2}:\frac{1}{2}\sqrt{2}:\ \sqrt{2}:1:\ \sqrt{2}:1$$
$$= 2:\ \sqrt{2}:\ \sqrt{2}:2\sqrt{2}:2:2\sqrt{2}:2.$$

Erkl. 85. Die sieben ähnlichen Dreiecke der Fig. 10 werden sämtlich rechtwinklig gleich-

schenklig und haben bloss dreierlei verschiedene Grössen nämlich:

$ABC : ACD : CBD : AEB : BEC : E'BA : E'AC$
$= a^2c \; : a^3 : \; a^3 : ac^2 : a^2c \; : ac^2 : a^2c,$
also:
$= a^3\sqrt{2} : \; a^3 : \; a^3 : \; 2a^3 : a^3\sqrt{2} : 2a^3 : a^3\sqrt{2}$
$= \sqrt{2} \; : 1 \; : \; 1 : \; 2 \; : \sqrt{2} \; : 2 \; : \sqrt{2}$
$= 2 \; : \sqrt{2} : \; \sqrt{2} : 2\sqrt{2} : \; 2 : 2\sqrt{2} : 2.$

Es wird also $\triangle ABC \cong BEC \cong E'AC$; $ACD \cong CBD$; $AEB \cong E'BA$. Und zwar sind die Längen der drei ersten Dreiecke $\sqrt{2}$ mal so gross, als die der nächsten zwei, aber $\sqrt{2}$ mal so klein als die der letztern, oder die Flächen der drei erstern sind das doppelte der zweiten, aber die Hälfte der dritten.

metrisch zu CD als Achse. Jedesmal $a^2 = h \cdot k$, denn:

$$k = 2 \cdot h, \quad h^2 = \frac{1}{2}a^2, \quad h \cdot k = 2h^2 = a^2.$$

Frage 34. Welche Abänderung erfährt Satz 9 für die besondern Dreiecke?

Erkl. 86. Ist φ der Winkel zwischen den Seiten c_1 und c_2 zweier gleichschenkligen Dreiecke, und derselbe Winkel φ auch gleich $\sphericalangle (b_1 b_2)$, so muss zunächst $\sphericalangle (c_1 b_1) = (c_2 b_2)$, also $\alpha_1 = \alpha_2$ sein. Ist aber $\alpha_1 = \alpha_2$, so muss als Basiswinkel auch $\beta_1 = \beta_2$ und folglich auch $\gamma_1 = 180 - 2\alpha_1 = 180 - 2\alpha_2 = \gamma_2$ sein. Demnach ist auch $\sphericalangle (c_1 a_1) = (c_2 a_2)$ und $(c_1 b_1) = (c_2 b_2)$, also muss auch nicht nur $\sphericalangle (c_1 c_2) = (b_1 b_2) = \varphi$, sondern auch $\sphericalangle (\alpha_1 \alpha_2) = \varphi$ sein, und Satz 9 ist in allen Beziehungen erfüllt.

Erkl. 87. Genau dieselben Betrachtungen gelten für zwei andere Seitenpaare eines gleichschenkligen oder für Hypotenuse und eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks. Für die beiden Katheten gilt die Folgerung nicht; denn ist φ der Winkel der ersten Katheten $(a_1 a_2)$, so muss auch Winkel $(b_1 b_2) = \varphi$ sein. Dann kann aber erst noch $\sphericalangle (c_1 c_2)$ jeden beliebigen Wert annehmen, je nach der Grösse der Winkel α_1 und α_2.

Erkl. 88. Beim gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck lassen sich auf Grund nebenstehender Ueberlegung an Stelle von Satz 9a folgende aufstellen:

Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn irgend zwei Seiten des einen (beide gleich- oder beide ungleichlaufend) parallel oder senkrecht sind mit den zwei entsprechenden Seiten des andern. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn Hypotenuse und eine Kathete des einen (beide gleich- oder beide ungleichlaufend) parallel oder senkrecht sind den entsprechenden Seiten des andern.

Antwort. 1) Da beim gleichschenkligen Dreieck durch einen beliebigen Winkel, und beim rechtwinkligen Dreieck durch einen der spitzen Winkel alle Dreieckswinkel bestimmt sind, so ist nicht mehr die Gleichheit der Winkel aller drei Seitenpaare unabhängig, sondern wenn die Winkel zweier Schenkelseiten solcher Winkel gleichgross sind, ist der Winkel des dritten Seitenpaares selbst gleich, da ja ihr Winkel mit den vorigen in beiden Dreiecken gleichgross sein muss. Man kann daher für das gleichschenklige Dreieck auf Aehnlichkeit schliessen, sowie irgend zwei Seiten des einen (beide gleichlaufend oder beide ungleichlaufend) gleiche Winkel mit den beiden entsprechenden Seiten des andern bilden. Und ebenso sind rechtwinklige Dreiecke ähnlich, wenn die Hypotenuse und eine Kathete des einen (beide gleichlaufend oder beide ungleichlaufend) gleiche Winkel mit den entsprechenden Seiten des andern bilden. Beide Sätze gelten insbesondere auch für parallele oder senkrechte Lage zweier Seitenpaare der genannten Art.

2) Beim gleichseitigen oder beim rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck sind gar keine willkürlichen Winkelgrössen, also ist auch die Aehnlichkeit nicht aus bestimmter gegenseitiger Lage zu erschliessen. Bilden vielmehr die ersten zwei einander entsprechenden

Erkl. 89. Beim gleichseitigen Dreieck sind für die perspektivische Lage alle drei Seiten gleichwertig, beim rechtwinklig gleichschenkligen nicht einmal die beiden Katheten. Denn nur die eine derselben schliesst sich jeweils in der vorgegebenen Umlaufsrichtung an die Hypotenuse an. Daher kommt ein gleichseitiges Dreieck zu einem andern perspektivisch liegenden nach jeder Drehung um 60° wieder in perspektivische Lage (abwechselnd mit äusserem und innerem Aehnlichkeitspunkt), ein rechtwinklig gleichschenkliges nur nach Drehung um 180°.

Seiten zweier solchen Dreiecke einen gewissen Winkel, so müssen die beiden andern Seitenpaare denselben Winkel miteinander bilden. Die in Figur 5 und 6 vorliegende perspektivische Lage aber ist bei beiden Dreiecksgattungen dann erreicht, wenn eine Seite des einen Dreiecks parallel einer entsprechenden des andern ist.

---

4) Ueber die Anwendung der Aehnlichkeit auf das Viereck.

Frage 35. Welche Eigenschaften müssen ähnliche Vierecke besitzen?

Antwort. In ähnlichen Vierecken müssen alle entsprechenden Winkel beider Vierecke gleichgross sein und alle entsprechenden Seiten proportional, d. h. für zwei Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und $A_2B_2C_2D_2$ muss:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \delta_1 = \delta_2$$

und

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2$$

oder:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = x.$$

Solche ähnliche Vierecke lassen sich ebenfalls in die perspektivische Lage bringen. Denn wegen Proportionalität der Seiten und Gleichheit der Winkel müssen die Verbindungsgeraden sämtlicher entsprechenden Punkte durch einen Aehnlichkeitspunkt gehen und alle entsprechenden Seiten parallel sein, sowie ein Paar entsprechender Strecken in parallele Lage gebracht ist.

Dabei bleibt insbesondere auch Satz 7 in voller Gültigkeit.

Erkl. 90. Wie schon früher, zeigt sich auch hier, dass der Begriff der Aehnlichkeit eine Reihe von Eigenschaften unter sich begreift, welche zwar bei ähnlichen Figuren alle zutreffen, aber nicht alle unabhängig sind. Wie beim Dreieck zeigt sich nämlich, dass das Zutreffen einer Anzahl dieser Eigenschaften das Vorhandensein der andern von selbst mit sich bringt, so dass eine solche Anzahl, wie diese übrigen ausmachen, nicht mehr als willkürliche Bedingungen aufgestellt werden können,

Erkl. 91. Ist eine Seite a_1 parallel ihrer entsprechenden a_2, so wird wegen $\beta_1 = \beta_2$ auch $b_1 \parallel b_2$, dann wegen $\gamma_1 = \gamma_2$ auch $c_1 \parallel c_2$ u. s. w. Der Schnittpunkt S von A_1A_2 und B_1B_2 kann wieder äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt werden, und da $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$, so geht C_1C_2 durch denselben Punkt S, welcher als Schnittpunkt von A_1A_2 und B_1B_2 entstand, denn auch:

$$A_1S : A_2S = B_1S : B_2S = C_1S : C_2S = x.$$

Frage 36. Wie sind die unabhängigen Aehnlichkeitsbedingungen für Vierecke zu finden?

Antwort. Um die zur Aehnlichkeit nötigen Bedingungen zu finden, sucht man diejenigen Bestimmungsstücke, aus welchen sich, abgesehen von dem absoluten Werte der in ihren Verhältnissen gleichbleibenden Längengrössen, nur einerlei Vierecke konstruieren lassen. Nun hat aber das Viereck fünf willkürliche Bestimmungsstücke, also bleiben für die Aehnlichkeit vier willkürliche

Bedingungen, nämlich dieselben wie die Kongruenzbedingungen, wenn nur Gleichheit der Seitengrössen in Gleichheit der Seitenverhältnisse verwandelt wird. Man erhält also:

Satz 13. Zwei Vierecke sind ähnlich, wenn sie entsprechend gleichgross haben:

1) drei Seitenverhältnisse und die Grösse der beiden eingeschlossenen Winkel, — oder

2) die Verhältnisse zweier anstossenden Seiten und die Grösse dreier gleichliegenden Winkel, — oder

3) die vier Seitenverhältnisse und einen entsprechend liegenden Winkel, wenn der Gegenwinkel des gleichen Winkels beidemal kleiner oder beidemal grösser als 180°, — oder

4) drei Seitenverhältnisse und einen eingeschlossenen und einen gegenüberliegenden Winkel, wenn der zweite Gegenwinkel jedesmal spitz oder jedesmal stumpf ist.

Die zugehörigen Formeln für die vier Sätze sind:

1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ und $\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$;

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ und $\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,\ \delta_1 = \delta_2$;

3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$
und $\alpha_1 = \alpha_2,\ \gamma_1 \gtrless 180^0 \lessgtr \gamma_2$;

4) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
und $\alpha_1 = \alpha_2,\ \gamma_1 = \gamma_2,\ \delta_1 \gtrless 180 \lessgtr \delta_2$.

Erkl. 92. Man kann für die nebenstehende Antwort den Gedankengang der Antworten der Fragen 5 bis 9 wiederholen in der Weise: Sind gegeben etwa $a : b : c$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$, und man wählt für eine Seite, a_1, eine bestimmte Länge, so gibt es ein einziges Viereck, für eine zweite Länge a_2 wieder ein einziges Viereck. Trägt man dann β_2 auf β_1, a_2 und b_2 auf a_1 und b_1 ab, so wird $c_2 \parallel c_1$, und Punkt B wird Aehnlichkeitspunkt für beide Vierecke $A_1B_1C_1D_1$ und das übertragene $A_2B_2C_2D_2$. Da aber $A_3B_3C_3D_3$ nach dem entsprechenden Kongruenzsatz mit $A_2B_2C_2D_2$ kongruent ist, so ist auch:
$$A_2B_2C_2D_2 \backsim A_1B_1C_1D_1.$$
Und ebenso wiederholt sich die Schlussfolgerung für alle vier Fälle.

Erkl. 93. Von den nebenstehenden vier Sätzen sind die ersten zwei unbedingte, die zwei andern mit Bedingung, entsprechend der Zweideutigkeit des III. Kongruenz- und Aehnlichkeitssatzes beim Dreieck. Die Kongruenzsätze für das Viereck (Satz 92 des III. Teiles dieses Lehrbuches) enthalten dieselben Aussagen, nur statt Seitenverhältnissen jeweils die Seitengrössen selbst.

Frage 37. Welche Abänderungen erfahren diese Sätze für die besonderen Vierecke?

Antwort. Unter den besonderen Vierecken wird jeweils durch den Namen allein eine oder mehrere der obigen Bedingungen festgesetzt, so dass nicht mehr vier, sondern nur drei oder weniger selbständige Bedingungen übrigbleiben.

1) So verbleiben beim Trapez nur noch zwei willkürliche Winkel, also folgt Aehnlichkeit zweier Trapeze, wenn sie gleichgross haben: 1) die vier Seitenverhältnisse, 2) einen Winkel und

Erkl. 94. Bezeichnet man die Seiten der Vierecke wie bisher, so sind die Aehnlichkeitsbedingungen für das Trapez die folgenden:

1) $a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2$;

2) $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ oder $\beta_1 = \beta_2$;

3) $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$;

4) $d_1 : a_1 : b_1 = d_2 : a_2 : b_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$,

falls $\alpha_1 \gtrless 180 \lessgtr \beta_1$ und $\alpha_2 \gtrless 180 \lessgtr \beta_2$.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1318. Heft. Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1317. — Seite 33—48.
Mit 13 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1317. — Seite 33—48. Mit 13 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Ebenso entsteht für das Antiparallelogramm:

1) $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$;

2) $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ oder $a_1 : c_1 = a_2 : c_2$ oder $b_1 : d_1 = b_2 : d_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$.

Endlich im Deltoid:

1) $a_1 : d_1 = a_2 : d_2$ und $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha_2$ oder $\sphericalangle \delta_1 = \delta_2$ (für $d < a$);

2) $a_1 : d_1 = a_2 : d_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ (für $d < a$), falls $\delta_1 \gtrless 180 \lessgtr \delta_2$;

3) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\delta_1 = \delta_2$.

Erkl. 95. Die durch Trapez (bezw. Antiparallelogramm) und durch Deltoid veranlassten Aenderungen der Aehnlichkeitsbedingungen sind vergleichbar jenen bei den rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken. Erstere enthalten eine Winkelbeziehung und nur versteckt auch eine dadurch veranlasste Seitenbeziehung, letztere dagegen bringen einen bestimmten Wert eines oder zweier Seitenverhältnisse:

Antiparallelogramm $b : d = 1 : 1$,
Deltoid $a : b = 1 : 1$
und $c : d = 1 : 1$.

Figur 11.

Erkl. 96. Für Parallelogramm und Rhombus ist keine Angabe nötig über die Lage des gleichgrossen Winkels zu den Seiten. Denn ob man den stumpfen oder den spitzen Winkel wählt, so ist er doch in jeder Figur einmal von den beiden verhältnisgleichen Seiten eingeschlossen. Daher fehlt auch in diesen Aehnlichkeitssätzen der sonst vorhandene Zusatz der „entsprechenden Lage" der gleichen Winkelgrössen.

Aus diesem Grunde fällt auch bei allen Parallelogrammen die Unterscheidung der Erkl. 89 fort; denn zwei ähnliche Parallelogramme in perspektivischer Lage (Figur 11) können sowohl durch einen äussern als einen innern Aehnlichkeitspunkt in Beziehung gesetzt

das Verhältnis beider Grundseiten und eines Schenkels, 3) zwei (also vier) Winkel und das Verhältnis einer Grundseite zu einem Schenkel, 4) einen Winkel und das Verhältnis beider Schenkel und einer Grundseite, falls die Grundseitenwinkel beide gleichartig oder beide ungleichartig sind.

2) Im Antiparallelogramm, wo nur eine willkürliche Winkelgrösse bleibt, besteht Aehnlichkeit, wenn gleichgross ist: 1) das Verhältnis der dreierlei Seiten, 2) ein Winkel und das Verhältnis von zweierlei Seiten.

3) Im Deltoid sind zwei Seitenverhältnisse fest bestimmt gleich der Einheit, also nur noch ein Seitenverhältnis willkürlich. Als Aehnlichkeitsbedingung verbleibt daher die Gleichheit: 1) der Seitenverhältnisse und der Winkel der ungleichen oder der kleineren Seiten, 2) der Seitenverhältnisse und der Winkel der grösseren Seiten, falls jene der kleineren beidemal $\gtrless 180^0$, 3) der Winkelgrössen allein.

4) Wichtiger als die vorigen drei Fälle sind die folgenden, nämlich für das Parallelogramm, wo nur ein Seitenverhältnis und eine Winkelgrösse willkürlich bleibt,

5) für das Rhombus, wo nur eine einzige Winkelgrösse,

6) das Rechteck, wo nur ein einziges Seitenverhältnis,

7) das Quadrat, wo weder ein Seitenverhältnis, noch eine Winkelgrösse willkürlich ist.

Man erhält daher für diese vier Gattungen des Vierecks:

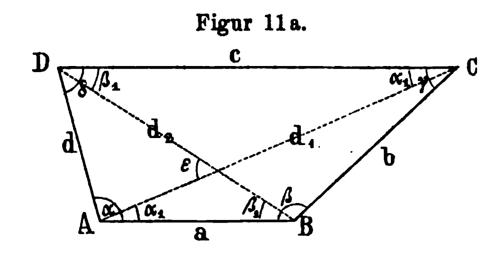
Satz 14. Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie das Verhältnis der Seiten und eine Winkelgrösse, Rhomben sind ähnlich, wenn sie einen Winkel, Rechtecke sind ähnlich, wenn sie das Seitenverhältnis gleich haben; Quadrate sind stets ähnlich.

werden, ohne dass beim Wechsel dieser beiden Anschauungsweisen eine Lageveränderung nötig wird (nur eine Aenderung der entsprechenden Buchstaben-Bezeichnung).

Dies war aber beim Dreieck nicht der Fall, nicht einmal beim gleichseitigen Dreieck (vergl. Erkl. 89).

Frage 38. Welche Einzelheit liefert die Anwendung der Aehnlichkeit auf das Trapez?

Figur 11a.



Antwort. Zieht man im beliebigen Trapez (Figur 11a) die Diagonalen AC und BD, so entstehen die vier Teildreiecke über den Seiten a, b, c, d. Darunter erhält das erste und dritte entsprechend gleichgrosse Winkel, denn als innere Wechselwinkel sind $BAC = DCA = \alpha_1$ und $ABD = CDB = \beta_1$; auch sind die dritten Winkel Scheitelwinkel. Folglich erhält man die Aussage:

Satz 15. In jedem Paralleltrapez sind die von den Grundseiten mit den Diagonalen gebildeten Dreiecke einander ähnlich.

Die aus diesem Satz hervorgehenden Streckenproportionen sind bereits im vorigen Teil dieses Lehrbuches aufgestellt worden (Antwort der Frage 55 des VI. Teiles), sie sind:

$$AB : BM : MA = CD : DM : MC.$$

Erkl. 97. Bezeichnet man der Kürze halber für den Augenblick mit A, B, C, D die vier von den Seiten a, b, c, d mit den Diagonalen gebildeten Dreiecke und mit $e_a e_c f_b f_d$ die Diagonalabschnitte, so erhält man für die verschiedenen Vierecke folgende Zusammenstellung:

Beliebiges Viereck:	A, B, C, D allgemein verschieden; nur (nach Satz 18a des V. Teiles) $A : B : C : D = e_a \cdot f_b : f_b \cdot e_c : e_c \cdot f_d : f_d \cdot e_a$.		
Paralleltrapez:	$A \sim C$, $B = D$	$e_a : e_c = f_b : f_d = a : c$, $A : C = a^2 : c^2$, $A : B = a : c$, also $A : B : C = a^2 : ac : c^2$.	
Antiparallelogramm:	$A \sim C$, $B \cong D$; $e_a = f_b$, $e_c = f_d$		
Deltoid:	$A \cong B$, $C \cong D$; $e_a = e_c$, $A : C = f_b : f_d$.		
Parallelogramm:	$A = B = C = D$	beide bloss gleichlaufend $\cong$	Parallelogr. u. Rh. $e_a = e_c$; $f_b = f_d$
Rechteck:	$A \cong C$, $B \cong D$	beide gleich- u. ungleichl. $\cong$	
Rhombus: Quadrat:	$A \cong B \cong C \cong D$	benachbarte ungleich-, gegenüberliegende gleichlaufend $\cong$ alle gleich- und ungleichlfd. $\cong$	Rechteck u. Quad. $e_a = e_c = f_b = f_d$.

---

5) Ueber die Anwendung der Aehnlichkeit auf das allgemeine Vieleck.

Frage 39. Welche Eigenschaften müssen ähnliche Vielecke besitzen?

Antwort. In zwei ähnlichen Vielecken müssen alle entsprechenden Winkel beider Vielecke gleichgross

und alle entsprechend liegenden Seiten proportional sein, d. h. für zwei Vielecke $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \cdots$ und $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \cdots$ muss:

$\alpha_1 = \alpha_2, \ \beta_1 = \beta_2, \ \gamma_1 = \gamma_2, \ \delta_1 = \delta_2, \ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdots$ und

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 : e_1 \cdots = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 : e_2$$

oder:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{e_1}{e_2} = \cdots = x.$$

Je nach der gleichen oder ungleichen Umlaufsrichtung durch diese proportionalen Strecken bezw. gleichen Winkel unterscheidet man gleichlaufende oder ungleichlaufende Aehnlichkeit.

Erkl. 98. Beim Vieleck ist es besonders wichtig, dass die entsprechenden Seiten beider Figuren in derselben Reihenfolge zu einander und zu den gleichgrossen Winkeln liegen. Nur beim Dreieck allein ist eine solche Festsetzung unnötig; denn wenn drei Seiten und drei Winkel bekannt sind, so können daraus nicht mit verschiedenen Anordnungen Dreiecke gebildet werden, weil durch die Grössenfolge der Seiten auch die Grössenfolge der Winkel eindeutig festgelegt ist.

Frage 40. Wie sind die unabhängigen Aehnlichkeitsbedingungen für Vielecke zu finden?

Antwort. Vielecke müssen ähnlich sein, wenn sie in solchen Elementen übereinstimmen, aus welchen sich nur ähnliche Vielecke konstruieren lassen. Diese Bedingungen ergeben sich also aus den Kongruenzsätzen für die Vielecke, wenn man darin eine Längengrösse willkürlich lässt und nur das Verhältnis der Seitenstrecken festlegt. Man erhält daher aus den $2n-3$ willkürlichen Elementen für die eindeutige Konstruktion des n-Ecks je $2n-4$ willkürliche für die Aehnlichkeit, nämlich wie folgt:

Satz 16. Zwei n-Ecke sind ähnlich, wenn sie entsprechend gleichgross haben:

1) $n-1$ Seitenverhältnisse und die $n-2$ von ihnen eingeschlossenen Winkel — oder

2) die Verhältnisse von $n-2$ aneinanderstossenden Seiten und alle Winkel — oder

3) alle n Seitenverhältnisse und $n-3$ aufeinanderfolgende Winkel, wenn der mit keinem gegebenen Winkel benachbarte fehlende Winkel beidemal kleiner oder beidemal grösser als 180^0 ist — oder

4) $n-1$ Seitenverhältnisse und $n-2$ aufeinanderfolgende Winkel, wovon einer an der fehlenden Seite liegt, falls der zweite Winkel

Erkl. 99. Der Beweis im einzelnen, dass Vielecke ähnlich sind, wenn sie eine der nebenstehenden Gruppen von Bedingungen erfüllen, wird ebenso geführt, wie für das Dreieck in Antworten der Fragen 5 bis 9: Man konstruiert aus den gegebenen Stücken mit freier Wahl je einer Seite zwei Vielecke, legt dann das zweite in perspektivischer Lage so in das erste, dass nur die in den Bedingungen fehlenden Stücke frei bleiben, und beweist auch deren Uebereinstimmung in beiden Vielecken.

Erkl. 100. Unter „$n-1$ Seitenverhältnissen“ versteht man die $n-1$ Quotienten zwischen je einer Seite des einen und der entsprechenden Seite des andern Vielecks. Also $n-1$ Quotienten der Art $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdots$, jeder gleich der Verhältnisgrösse x. Gleichsetzung von $n-1$ solchen Brüchen gibt also $n-2$ selbständige Gleichungen. Dieselben ergeben sich auch aus dem Ansatz der fortlaufenden Proportion mit beiderseits $n-1$ Gliedern: $a_1 : b_1 : c_1 : \cdots = a_2 : b_2 : c_2 : \cdots$ Denn wenn aus dieser fortlaufenden Proportion die Einzelproportionen ausgeschrieben werden, so sind darunter wieder $n-2$ selbständige Gleichungen. Hiezu $n-2$ Winkelgleichheiten: gibt die $2n-4$ Bedingungen.

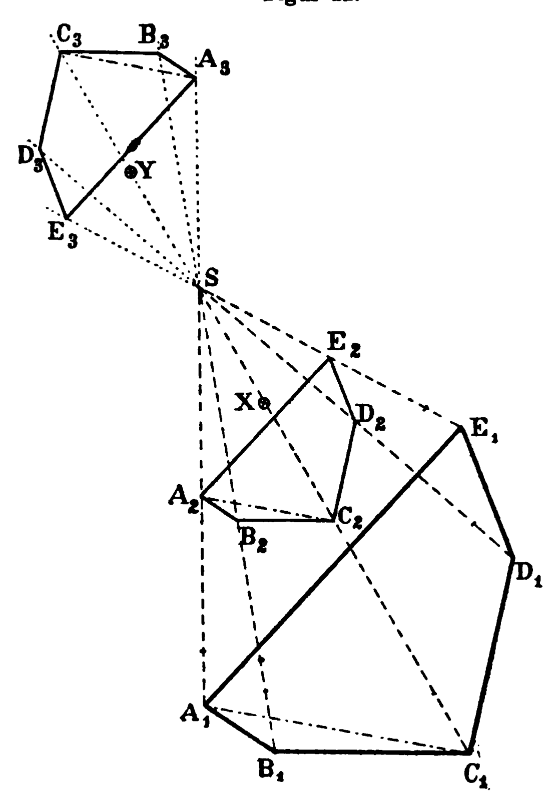
Ebenso entsteht die Anzahl $2n-4$ bei $n-2$ Verhältnissen und $n-1$ unabhängigen Winkeln aus $n-3+n-1$ und bei n Verhältnissen und $n-3$ Winkeln aus $n-1+n-3 = 2n-4$.

an der fehlenden Seite beidemal spitz oder beidemal stumpf ist.

Satz 16 a. Regelmässige Vielecke gleicher Seitenzahl sind stets ähnlich.

Frage 41. Welche Beziehungen entstehen zwischen ähnlichen Vielecken, wenn dieselben in perspektivische Lage gebracht sind?

Figur 12.



Erkl. 101. Aehnlich liegende Punkte der beiden Figuren sind ausser den Ecken etwa die Seitenmitten, sonstige Teilpunkte der Seiten nach gleichem Verhältnis u. s. w. Auch Punkte der Figur, die nicht auf deren Umring gelegen sind, können als zur Figur gehörig betrachtet werden, z. B. Mittelpunkte oder sonstige Teilpunkte von Diagonalen, Winkelhalbierenden u.s.w. Aber auch Punkte ausserhalb des Umrings der Figur können als einer bestimmten Figur gehörig betrachtet werden, z. B. Höhenfusspunkte auf Seitenverlängerungen, äussere Teilpunkte von Seiten oder Diagonalen und viele andere —

Antwort. Sind $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ in Figur 12 zwei ähnliche Vielecke in perspektivischer Lage mit äusserem Aehnlichkeitspunkte S, oder $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_3B_3C_3D_3E_3$ in derselben Figur 12 zwei ähnliche Vielecke in perspektivischer Lage mit innerem Aehnlichkeitspunkte S, so entstehen folgende Beziehungen:

1) Je zwei entsprechende Punkte beider Figuren liegen auf derselben Geraden durch den Aehnlichkeitspunkt S. Das gilt nicht nur von den Eckpunkten der beiden Fünfecke, sondern auch von sonstigen „ähnlich liegenden“ Punkten beider Figuren, und zwar ob innerhalb oder ausserhalb des einzelnen Vielecks gelegen.

2) Die Abstände ähnlich liegender Punktepaare beider Figuren vom Aehnlichkeitspunkt stehen stets im gleichen Verhältnis, und zwar in Figur 12 im Verhältnis $2:1$ sowohl für $A_1B_1C_1D_1E_1$ mit $A_2B_2C_2D_2E_2$ als auch für:

$A_1B_1C_1D_1E$ mit $A_3B_3C_3D_3E_3$.

3) Auch die Abstände je zweier beliebigen Punkte der einen Figur stehen zu den Abständen der zwei ähnlich liegenden Punkte der andern Figur stets in demselben Verhältnis, nämlich in Figur 12 wieder im Verhältnis $2:1$ für beide Gruppen 1 mit 2 und 1 mit 3. Insbesondere gilt dies von den Seiten der Vielecke als ähnlich liegenden Strecken.

4) Die Verbindungslinien je zweier beliebigen Punkte der einen Figur sind parallel den Verbindungslinien der zwei ähnlich liegenden Punkte der andern Figur, bilden also gleichgrosse Winkel mit den

ja bei hinreichender Erweiterung der Anschauungsweise sogar alle Punkte der Zeichenebene. Und zu jedem der einen Figur zugeschriebenen Punkt besteht ein ähnlich liegender Punkt der andern Figur; derselbe liegt auf demselben Aehnlichkeitsstrahle durch S und zwar in einem Abstande von S, zu welchem sich der Abstand des erstern Punktes verhält wie etwa $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = \cdots = x$, in Figur 12 gleich 2.

Erkl. 102. Bei der eben genannten Erweiterung der Betrachtungsweise hat man nicht mehr bloss zwei ähnliche Figuren, sondern zwei ähnliche „ebene Systeme“, welche in derselben Zeichnungsebene liegen. Dabei ist S der einzige sich selbst zugeordnete Punkt beider Systeme, und sonstige zugeordnete Punkte werden gefunden, indem man auf irgend welchem Aehnlichkeitsstrahle von S aus zwei Strecken abträgt, welche sich verhalten wie:

$$SA_1 : SA_2 = \cdots = x.$$

Erkl. 103. Eine thatsächliche Anwendung der vorliegenden Ueberlegungen ist die Wiedergabe einer Figur oder einer Zeichnung, eines Gemäldes, einer Photographie, eines Planes oder einer Karte in einer vorgeschriebenen Vergrösserung oder Verkleinerung (Verjüngung). Da- Dabei werden Winkelgrössen des Originals beibehalten, Längengrössen aber nach dem verlangten Verhältnis vergrössert oder verkleinert. Ueber die dadurch bedingte Aenderung der Flächengrössen sehe man unten die Antwort der Frage 44.

Erkl. 104. Stellt man die Einzelfälle der Beziehungen zusammen, welche in nebenstehenden Antworten enthalten sind, so erhält man nachfolgende Gruppen:

1) In gerader Linie liegen:
SA_1A_2, SB_1B_2, $\cdots$ (ebenso SA_1A_3, SB_1B_3, $\cdots$).
2) $SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = \cdots = x\ (= 2)$.
3) $A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2 = \cdots = x\ (= 2)$.
4) $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $\cdots$
5) $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$,
$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$.
6) $\triangle A_1B_1S \sim A_2B_2S$, $\triangle A_1C_1S_1 \sim A_2C_2S_2$.
7) $\triangle A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$, $\triangle A_1C_1D_1 \sim A_2C_2D_2$, Viereck $A_1C_1D_1E_1 \sim A_2C_2D_2E_2$.

Aehnlichkeitsstrahlen der entsprechenden Punktepaare.

5) Die Verbindungslinien zweier beliebigen Punktepaare der einen Figur bilden untereinander gleichgrosse Winkel, wie die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der andern Figur. Insbesondere sind also alle entsprechenden Vieleckswinkel gleichgross.

6) Die Verbindungsstrecke zweier beliebigen Punkte der einen Figur als Grundseite mit dem Aehnlichkeitspunkt als Spitze bilden ein Dreieck, ähnlich dem Dreieck der Verbindungsstrecke der entsprechenden Punkte der andern Figur als Grundseite mit demselben Aehnlichkeitspunkt als Spitze.

7) Die Verbindungslinien je einiger beliebigen Punkte der einen Figur bilden ähnliche Teilvielecke, wie die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der andern Figur. Dies gilt besonders für Diagonaldreiecke mit den Seiten wie $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2 \sim A_3B_3C_3$.

8) Von diesen Eigenschaften sind die unter 1, 2, 4, 6 aufgezählten nur bei der perspektivischen Lage ähnlicher Vielecke vorhanden, dagegen gelten die Eigenschaften 3, 5, 7 auch in der schiefen Lage ähnlicher Vielecke. Der Beweis derselben ergibt sich unmittelbar aus Figur 12 oder aus wiederholter Einzelanwendung des Satzes 7. Und zwar ist zur Herstellung der perspektivischen Lage bei gleichlaufend ähnlichen Figuren eine Drehung nötig, bei ungleichlaufenden Umklappung und Drehung bezw. eine besonders auszuwählende Umklappung allein.

Frage 42. Welche verschiedenen Lagebeziehungen kann der Aehnlichkeitspunkt zu den zwei perspektivisch liegenden Figuren annehmen?

Antwort. Die Lage des Aehnlichkeitspunktes, und zwar sowohl eines äussern als eines innern, kann die folgenden vier Beziehungen aufweisen:

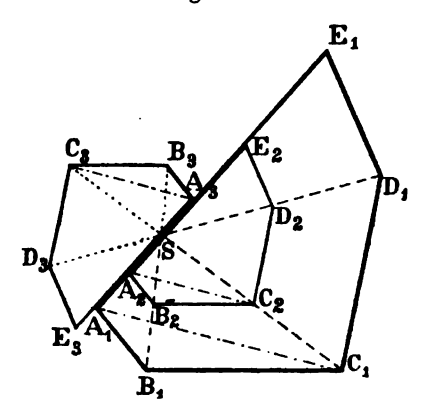
1) Der Aehnlichkeitspunkt liegt ausserhalb der ersten Figur

Erkl. 105. Einem äussern Punkt der einen Figur entspricht immer auch ein äusserer Punkt der ähnlichen. Da nach Erkl. 102 der Aehnlichkeitspunkt der einzige sich selbst entspre-

chende Punkt beider Figurensysteme ist, so muss er demnach für beide Figuren gleichzeitig äusserer Punkt oder gleichzeitig innerer Punkt sein.

Figur 13.

Figur 14.



Erkl. 106. In den Figuren 12 bis 16 ist stets zu derselben Figur $(ABCDE)$ derselbe Punkt S sowohl als äusserer wie auch als innerer Aehnlichkeitspunkt gewählt. Dabei ist als Originalfigur stets ungefähr dieselbe Figur genommen, und auch das gleiche Verjüngungsverhältnis $x = 2:1$. Man erhält also jedesmal die Punkte A_2, $B_2 \cdots$ als Mittelpunkte der (gestrichelten) Strecken SA_1, $SA_2 \cdots$, dagegen die Punkte A_3, $B_3 \cdots$ als Endpunkte derselben um die Hälfte über S hinaus (punktiert) verlängerten Strecken. Dabei entstehen in Fig. 12 und 13 jeweils neue fünf (bezw. alle n) Aehnlichkeitsstrahlen, in Figur 14 nur noch 3 (bezw. $n-2$), da SA und SE mit AE zusammenfallen, in Figur 15 sogar nur 2 (bezw. $n-3$), da SB mit BC, SD mit CD zusammenfällt und SC zum Punkte wird.

(Figur 12). Dann muss er auch ausserhalb der zweiten Figur liegen. [Ein Durchschneiden beider Figuren kann im allgemeinen vermieden werden, häufiger tritt es ein beim äussern als beim innern Aehnlichkeitspunkt (wenn z. B. in Figur 12 die Ecke C_2 über A_1E_1 hereinfiele).]

2) Der Aehnlichkeitspunkt liegt innerhalb der ersten Figur (Figur 13). Dann muss er auch innerhalb der zweiten Figur liegen. [Ein Durschneiden der beiden Figuren kommt bei äusserem Aehnlichkeitspunkt fast nicht vor, beim innern dagegen leichter ($A_3B_3C_3D_3E_3$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$ in Figur 13).]

3) Der Aehnlichkeitspunkt liegt auf dem Umring der ersten Figur, und zwar auf einer Seite (Figur 14). Dann muss er auch auf der entsprechenden Seite des Umrings der zweiten Figur liegen, und diese Seite fällt für beide Figuren in dieselbe Gerade, nämlich in einen Aehnlichkeitsstrahl. Dieser enthält daher die fünf Punkte S, A_1, A_2, E_1, E_2.

4) Der Aehnlichkeitspunkt liegt wieder auf dem Umring der ersten Figur, und zwar in einem Eckpunkte derselben (Figur 15). Dann fällt in denselben Punkt auch der entsprechende Eckpunkt der zweiten Figur, und die beiden an jener Ecke zusammenstossenden Seiten fallen für beide Figuren je in dieselbe gerade Linie.

Dabei bleibt in allen vier Fällen bestehen, dass ein äusserer Aehnlichkeitspunkt (ob er ausserhalb oder innerhalb der Figuren selbst liegt) ausserhalb aller Strecken A_1A_2, B_1B_2 u. s. w. liegt, oder dass A_1 und A_2 auf derselben Seite von S liegen, und dass ein innerer Aehnlichkeitspunkt (ob innerhalb oder ausserhalb der Figuren selbst) innerhalb aller Strecken A_1A_3, B_1B_3 u. s. w. liegt, oder dass A_1 und A_3 auf verschiedenen Seiten von S liegen. Man hat also in Figur 12 für $A_3B_3C_3D_3E_3$ mit den beiden anderen Figuren S als innern Aehnlichkeits-

Erkl. 107. Unterwirft man die vier Fig. 12 bis 15 der erweiterten Anschauungsweise nach Erkl. 102, so fallen alle vier nebenstehenden Fälle in einen zusammen. Denn man kann jeden Punkt der Ebene von der Figur ausnehmen (1), oder in die Figur einrechnen (2), oder eine Linie der Figur durch ihn gehen lassen (3), oder eine Ecke der Figur als Schnittpunkt zweier Linien dahin fallen lassen (4). Dann handelt es sich nur noch um die Feststellung der selbstentsprechenden Elemente beider Figuren, und das sind jeweils der Aehnlichkeitspunkt und die durch ihn gehenden Linien, die Aehnlichkeitsstrahlen. Solche sind in Figur 14 und 15 die durch S gehenden Vielecksseiten, sowie sämtliche durch S gehenden Transversalen der Figuren, in Figur 12 und 13 werden zu solchen die Strecken A_1A_2, B_1B_2 und alle Transversalen durch S, wenn man sie als zugehörige Strecken der Figuren betrachtet (Transversalen, Winkelhalbierende u. s. w.)

Erkl. 108. Der gemeinsame Aehnlichkeitspunkt S ist, wie die Figuren 12 bis 15 unmittelbar erkennen lassen, nicht nur für die Figuren 1 und 2, sowie 1 und 3, sondern auch für 2 und 3 jedesmal Aehnlichkeitspunkt und zwar für:

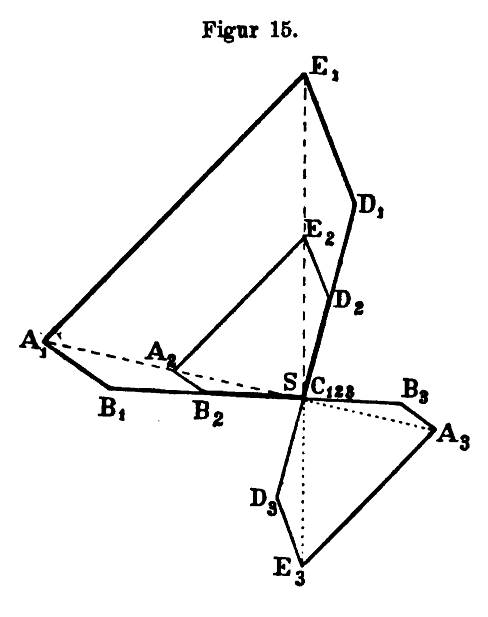
1 u. 2 äusserer mit Verjüngungsmassstab 2 : 1,
1 „ 3 innerer „ „ 2 : 1,
2 „ 3 innerer „ „ 1 : 1,

d. h. $(ABCDE)_2$ und $(ABCDE)_3$ sind kongruent (nämlich gleichwendig).

Und zwar ist es eine allgemeingültige Beziehung, dass wenn drei Figuren zum gleichen Aehnlichkeitspunkt perspektivisch liegen, dann dieser entweder für alle drei Paare äusserer Aehnlichkeitspunkt ist; oder für ein einziges Paar äusserer, für die beiden andern innerer Aehnlichkeitspunkt. Denn man kann auf demselben Aehnlichkeitsstrahle durch S drei zugeordnete Punkte nur so anordnen, dass entweder alle drei auf gleicher Seite von S, oder zwei auf der einen und der eine dritte auf der andern Seite gelegen ist.

punkt, obwohl S ausserhalb beider Figuren liegt, aber ebenso in Figur 13 für $A_1B_1C_1D_1E_1$ mit der Figur $A_2B_2C_2D_2E_2$ S als äussern Aehnlichkeitspunkt, obwohl S innerhalb beider Figuren liegt (vergl. Erkl. 107).

Figur 15.



Frage 43. Zu welcher besondern Anschauung führt die Vergleichung der Figuren $(ABCDE)_2$ und $(ABCDE)_3$ in den Figuren 12 bis 15?

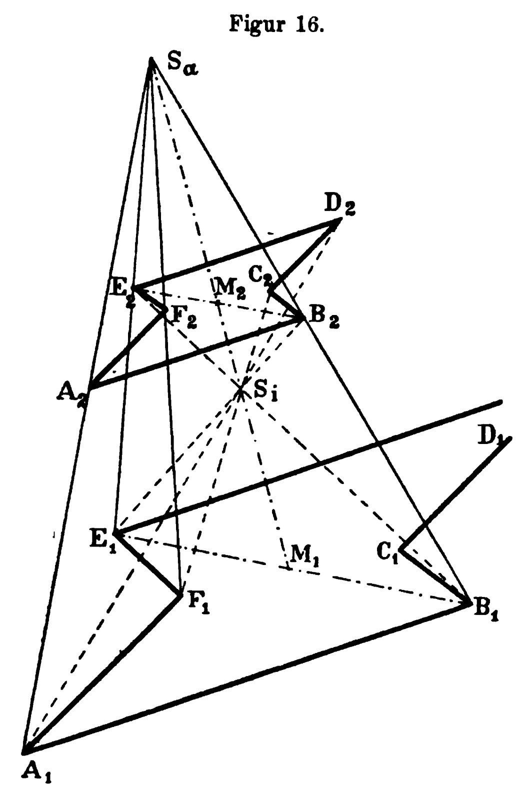
Antwort. 1) Da die Figuren $(ABCDE)_2$ und $(ABCDE)_3$ in Fig. 12 bis 15 kongruent sind, so kann man dieselben zusammenfassen zu einer einzigen zentrisch-symmetrischen Figur, denn durch eine Umdrehung um 180° gelangt jeweils der eine Teil dieser so zusammengesetzten Gesamtfigur mit dem andern Teil zur Deckung, die ganze Figur mit sich selbst. Man kann also jede zentrisch-symmetrische Figur durch einen beliebigen Durchmesser auseinanderschneiden und die beiden entstehenden

Erkl. 109. In Figur 12 würde die Gesamtfigur $A_1B_1C_1D_1E_1$ $A_3B_3C_3D_3E_3$ aus zwei getrennten Stücken bestehen, bei den anderen Figuren 13 bis 15 aber entsteht ein zusammenhängendes, bei Figur 13 ein überschlagenes Vieleck.

Erkl. 110. Durchmesser oder Zentrale nennt man bei einer zentrisch-symmetrischen Figur jede gerade Linie durch den Symmetriemittelpunkt; denn durch eine jede solche wird die Figur in zwei kongruente Hälften geteilt, und

jeder Durchmesser selber wird durch die Figur halbiert.

Figur 16.



Hälften als ähnliche und in perspektivischer Lage befindliche Einzelfiguren betrachten mit dem Symmetriezentrum als innerem Aehnlichkeitspunkt und dem Verjüngungsmassstab 1 : 1.

2) Bringt man daher zwei zentrische Figuren, welche ähnlich sind, in perspektivische Lage, so kann man nach Durchschneidung der beiden durch zwei ähnlich liegende Durchmesser zweierlei Zuordnung treffen, nämlich die eine Hälfte der ersten Figur entweder mit der einen oder mit der andern Hälfte der zweiten Figur. Dabei entsteht einmal ein äusserer und einmal ein innerer Aehnlichkeitspunkt, und da die Symmetriemittelpunkte der beiden Figuren beidemal entsprechende Punkte werden, so liegen diese beiden Aehnlichkeitspunkte auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte; und wegen der allgemeinen Beziehungen der Antwort der Frage 41 wird diese Verbindungsstrecke der Mittelpunkte durch die beiden Aehnlichkeitspunkte aussen und innen in demselben Verhältnis geteilt, nämlich im Verhältnis der entsprechenden Seiten beider ähnlichen Figuren (Figur 16).

Erkl. 111. Bei Figur 16 ist $B_1 E_1$ und $B_2 E_2$ ein Durchmesser des Sechsecks. Und diesem Durchmesser $B_1 E_1$ entspricht entweder $B_2 E_2$ oder $E_2 B_2$. Im erstern Fall entspricht der Hälfte $A_1 B_1 E_1 F_1$ der ersten Figur die Hälfte $A_2 B_2 E_2 F_2$ der zweiten mit S_a als äusserem Aehnlichkeitspunkt und:

$$S_a A_1 : S_a A_2 = S_a M_1 : S_a M_2 = A_1 B_1 : A_2 B_2;$$

im zweiten Fall entspricht derselben Hälfte $A_1 B_1 E_1 F_1$ der ersten Figur die Hälfte $D_2 E_2 B_2 C_2$ der zweiten mit S_i als innerem Aehnlichkeitspunkt und:

$$S_i A_1 : S_i D_2 = S_i M_1 : S_i M_2 = A_1 B_1 : D_2 E_2.$$

Da aber $D_2 E_2 = A_2 B_2$, so wird:

$$S_a M_1 : S_a M_2 = S_i M_1 : S_i M_2 = A_1 B_1 : A_2 B_2.$$

Erkl. 112. Die vorstehenden Betrachtungen geben die allgemeine Erklärung der Ergebnisse in Erkl. 96. Denn da durch das Zusammentreffen zweier kongruenten Hälften die zentrisch-symmetrischen Figuren nur geradzahlige Vielecke sein können, so kann auch nur bei geradzahligen Figuren dieser Unterschied der gegenseitigen Lage verschwinden. Dies war aber gerade in Erkl. 96 gefunden worden, dass nämlich die zentrischen Vierecke ohne Lagenveränderung zu einem äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt in perspektivische Lage kommen konnten. Dies gilt nicht vom gleichseitigen Dreieck, da dies eben nicht zentrisch-symmetrisch ist (nämlich nicht durch Umdrehung um 180°, sondern durch solche um 120° mit sich selbst zur Deckung gelangt).

Frage 44. Welches Ergebnis liefert die Vergleichung der Inhalte ähnlicher Vielecke?

Antwort. Aehnliche Vielecke lassen sich in lauter ähnliche Teildreiecke zerlegen, und die Inhalte je zweier entsprechenden dieser Teildreiecke verhalten sich nach Satz 8 wie die Quadrate

Erkl. 113. Sind a, b, $c \cdots k$, $l \cdots$ irgend welche Seiten oder Diagonalen zweier ähnlichen Vielecke, und bezeichnen für den Augenblick

$A, B, C \cdots K, L$ solche Teildreiecke, welche diese vorigen als Seiten haben, so ist:

$$A_1 : A_2 = a_1^2 : a_2^2,$$
$$B_1 : B_2 = b_1^2 : b_2^2,$$
$$K_1 : K_2 = k_1^2 : k_2^2,$$
$$L_1 : L_2 = l_1^2 : l_2^2.$$

Da aber bei ähnlichen Vielecken:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = \cdots k_1 : k_2 = l_1 : l_2 = x,$$

so muss auch:

$$a_1^2 : a_2^2 = b_1^2 : b_2^2 = \cdots k_1^2 : k_2^2 = l_1^2 : l_2^2 = x^2$$

sein, also:

$$A_1 = x^2 \cdot A_2, \quad B_1 = x^2 \cdot B_2,$$
$$K_1 = x^2 \cdot K_2, \quad L_1 = x^2 \cdot L_2,$$

also die Summe:

$$(A_1 + B_1 + \cdots) = x^2 (A_2 + B_2 + \cdots),$$

oder:

$$\frac{A_1 + B_1 + \cdots}{A_2 + B_2 + \cdots} = x^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \cdots$$

zweier ähnlich liegenden Strecken; diese Verhältnisse ähnlich liegender Strecken aber, und folglich auch die Verhältnisse der Streckenquadrate sind sämtlich gleichgross. Also verhalten sich auch die Inhalte der ähnlichen Vielecke im ganzen wie solche Quadrate ähnlich liegender Strecken. Insbesondere gilt:

Satz 17. Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Erkl. 114. Eine der bemerkenswertesten Anwendungen des nebenstehenden Satzes ist diejenige auf die Verjüngung bei ähnlichen Figuren. Ist die Verkürzung der Längen z. B. bei einer Landkarte 100000 : 1, so ist die Verjüngung der Fläche gleich 10000000000 : 1. Oder: Ist bei einem Bauplan eine Strecke von 80 m dargestellt durch eine Länge von 3,2 cm, so hat man (beim Ausdruck in Centimeter) als „Massstab" 32 : 8000 oder 1 : 250, aber die Fläche des Gebäudes kommt nur mit $\frac{1}{62500}$ ihrer wahren Grösse zur Darstellung. Bei Karten im Atlas u. s. w. pflegt am Rande als „Massstab" ebenfalls nur die Längenverkürzung angegeben werden; um also die Verkleinerung der Fläche zu erhalten, ist dieser Bruch noch ins Quadrat zu erheben.

Frage 45. Welche eigentümliche Anwendung lässt voriger Satz zu auf den pythagoreischen Lehrsatz?

Erkl. 115. Es erscheint lehrreich, die Entstehungsweise der Figur 17 im einzelnen zu beobachten. Fünfeck C ist dasselbe, wie Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ in den Figuren 12 bis 15. Ebenso Fünfeck A dasselbe, wie Fünfeck:

$$A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \text{ bezw. } A_3 B_3 C_3 D_3 E_3$$

in denselben Figuren. Da also $a = \frac{1}{2} c$, so handelt es sich darum, daraus zunächst die Kathete b eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, für welches $a = \frac{1}{2} c$ sein soll, und sodann das Fünfeck B ähnlich den Fünfecken A und C zu konstruieren. Das erstere geschieht durch Eintragen der Seite $a = \frac{c}{2}$ als Sehne

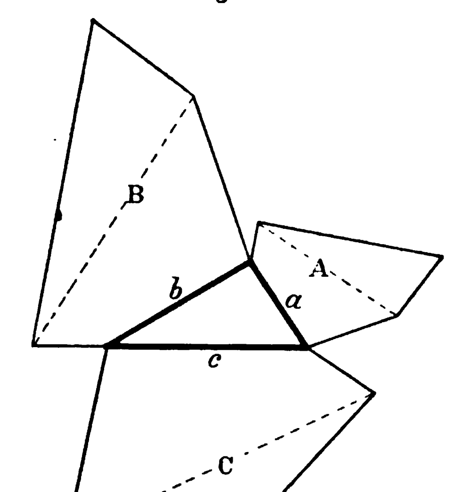
Antwort. Zeichnet man auf den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks beliebige, aber einander ähnliche Vielecke, für welche die Dreiecksseite zu je einer entsprechenden, d. h. ähnlich liegenden Seite wird, und bezeichnet mit A, B, C die Flächen dieser Vielecke (Figur 17), so erhält man aus vorigem Satz 17:

$$A : B : C = a^2 : b^2 : c^2.$$

Hierin setzt man nach dem Additionsgesetz der Proportionen (Erkl. 73 des VI. Teiles):

$$(A + B) : C = (a^2 + b^2) : c^2.$$

Figur 17.



im Halbkreis über c als Durchmesser. Die Herstellung des Fünfecks B ist dann an Fig. 12 geschehen, wie dort auch zu erkennen ist. Man trägt nämlich in den Winkel $B_1 S C_1$, Figur 12, diese Strecke b parallel $B_1 C_1$ ein, zieht von da aus Parallelen zu den übrigen Vielecksseiten, und erhält so das Fünfeck B, wie es durch die Punkte auf den Aehnlichkeitsstrahlen SA_1, $SB_1 \cdots$ je zwischen $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \cdots$ angedeutet ist, ähnlich $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$. Dieses Fünfeck ist dann kongruent auf die Kathete b in Figur 17 abzutragen.

Erkl. 116. Nach vorigen Ausführungen ist in Figur 17 $c = 2a$, folglich:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Demnach ist:

$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2,$$

also:

$$A : B : C = a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 3 : 4,$$

oder B das Dreifache, C das Vierfache von A; C so gross wie A und B zusammen.

Nun ist aber nach dem gewöhnlichen pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$, also $\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$, folglich auch:

$$\frac{A + B}{C} = 1 \text{ oder } A + B = C.$$

Man erhält also die Aussage:

Satz 18. Beim rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks über der Hypotenuse gleich der Summe der Inhalte der zwei ähnlichen Vielecke über den beiden Katheten als entsprechenden Vielecksseiten.

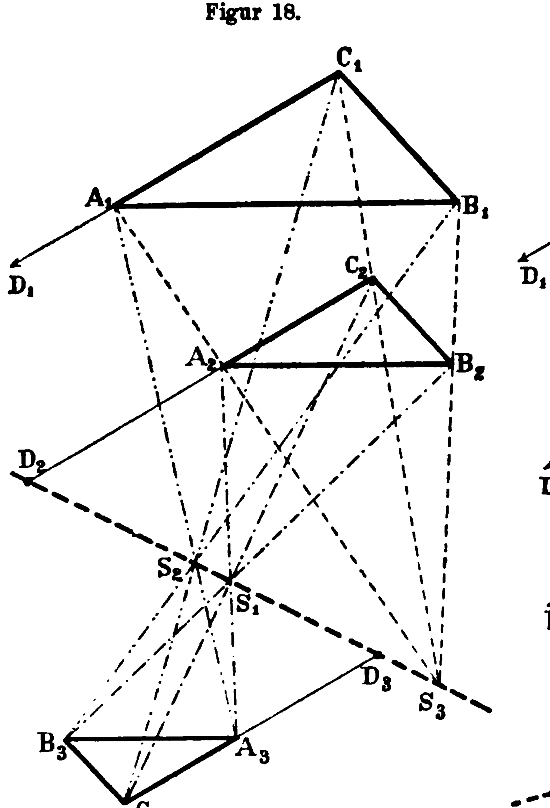
Der Satz gilt nicht bloss für diese Vielecke selbst, sondern, wie in Fig. 17 angedeutet, auch für entsprechende Teilvielecke derselben, z. B. für die den Dreiecksseiten anliegenden Vierecke, auch für die dem rechtwinkligen Dreieck gar nicht anliegenden Dreiecksabschnitte an der äussersten Ecke der Fünfecke A, B, C. (Dabei muss nur für jedes Dreieck die Kathete bezw. Hypotenuse die Eigenschaft ähnlicher Lage haben, im Sinne der allgemeinen Anschauungsweise der Erkl. 102.)

Erkl. 117. Es ist ohne weiteres klar, dass die Beziehungen des erweiterten pythagoreischen Lehrsatzes nicht nur für die Quadrate der Dreiecksseiten, sondern auch für ähnliche Vielecke über die Seiten des allgemeinen Dreiecks gelten: Ein Vieleck über der Gegenseite eines spitzen Winkels ist kleiner, das Vieleck über der Gegenseite eines stumpfen Winkels ist grösser als die Summe der ähnlichen Vielecke über den beiden anderen Seiten. Die Grösse dieses Unterschieds lässt sich allerdings nicht so einfach ausdrücken wie im allgemeinen pythagoreischen Satz für die Quadrate der Dreiecksseiten.

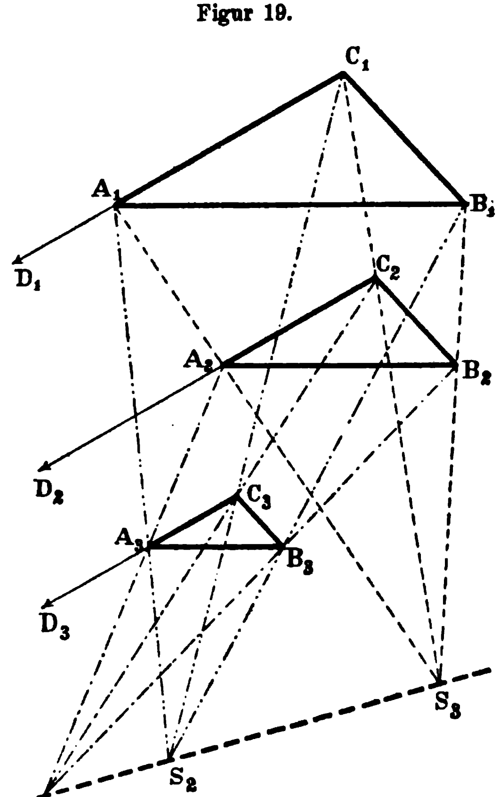
Frage 46. Welche Beziehung besteht zwischen drei ähnlichen Figuren, deren je zwei sich in perspektivisch ähnlicher Lage befinden?

Antwort. Denkt man sich etwa in den Figuren 5 und 6 oder in Figur 12 die dritte Figur entweder sich selbst parallel oder mit Drehung um 180° gegen

Figur 18.



Figur 19.



die beiden ersten so verschoben, dass der Aehnlichkeitspunkt der Figuren $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ verbleibt in S_3 (Figur 18 und 19), dagegen der Aehnlichkeitspunkt für $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ nach S_2 gelangt, so bleibt doch noch:

$$A_1B_1 \parallel A_3B_3, \quad \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_3,$$

$$A_1B_1 : A_2B_2 = A_1C_1 : A_2C_2 \cdots \text{ u. s. w.},$$

also sind auch $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ perspektivisch ähnlich, und somit müssen die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämtlich durch einen Aehnlichkeitspunkt S_1 hindurchgehen.

Dieser Punkt S_1 steht nun in einer besondern Beziehung zu den Punkten S_2 und S_3. Bezeichnet man nämlich mit D den jeweiligen Schnittpunkt der Geraden AB mit der Verbindungslinie S_2S_3, so werden entsprechende Punkte je zweier Figuren: D_1 und D_2 mit Aehnlichkeitspunkt S_3, ebenso D_1 und D_3 mit Aehnlichkeitspunkt S_2, folglich auch

Erkl. 118. Bei drei Figuren vorstehender Art kann man je einen Punkt der dritten finden, wenn die zwei Punkte der anderen gegeben sind. Geht man etwa von A_3 aus, so gelangt man über S_2 nach A_1, von da über S_3 nach A_2. Und wenn die Aehnlichkeitsstrahlen nach den vorgeschriebenen Verhältnissen geteilt sind, so entspricht dem Punkte A_3 der Punkt A_1, diesem wieder der Punkt A_2, also dem Punkte A_3 unmittelbar der Punkt A_2. Genau so mit den Punkten D_1, D_2, D_3. Zu D_3 gehört D_1 auf dem Strahl $S_2D_3D_1$, zu D_1 sodann D_2 auf dem Strahl $S_3D_1D_2$, folglich gehört zu D_3 Punkt D_2, also müssen beide Punkte auf demselben Aehnlichkeitsstrahl durch den Aehnlichkeitspunkt der zweiten und dritten Figur, nämlich durch Punkt S_1 liegen. Also liegt rückwärts S_1 auf derselben Geraden mit S_2 und S_3.

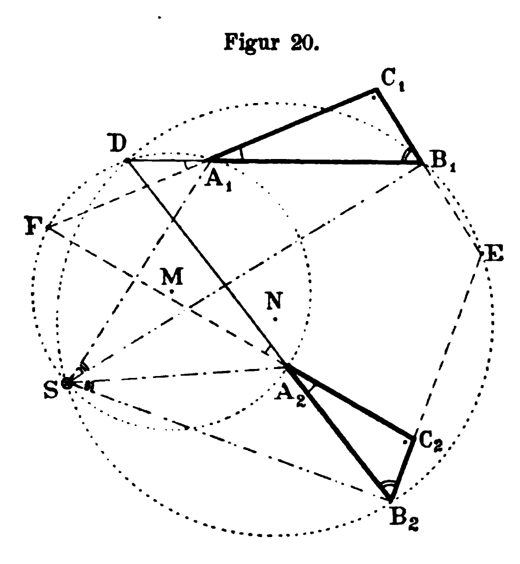
Erkl. 119. Der Beweis des nebenstehenden Satzes kann auch mittels der in Erkl. 102 begründeten erweiterten Anschauungsweise geführt werden. Die beiden ebenen Systeme, denen je die erste und zweite Figur angehört, haben als gemeinsame Elemente den Punkt S_3 mit allen Strahlen durch ihn, ebenso die Systeme der ersten und dritten Figur den Punkt S_2 mit allen Strahlen durch ihn. Der Strahl von S_3 durch S_2, d. h. die Verbindungsgerade S_2S_3 ist also sowohl gemeinsam dem ersten und zweiten, als dem ersten und dritten System, folglich auch gemeinsam dem zweiten und dritten System. Nun haben aber das zweite und dritte ebene System auch nur den Punkt S_1 mit den Strahlen durch denselben gemeinsam, also muss der Strahl S_2S_3 einer von diesen sein, d. h. S_2S_3 geht durch S_1, oder S_1 liegt auf S_2S_3.

(Erkl. 118) D_2 und D_3 für ihren Aehnlichkeitspunkt S_1. Demnach muss die Verbindungslinie D_2D_3 durch S_1 gehen; nun ist aber D_2D_3 eben die Linie S_2S_3, also folgt, dass S_1 auf der Verbindungslinie S_2S_3 liegt. Man erhält also:

Satz 19. Wenn drei ähnliche Figuren paarweise in perspektivischer Lage sich befinden, so liegen die drei Aehnlichkeitspunkte in einer geraden Linie (Aehnlichkeitsachse), nämlich entweder als zwei innere und ein äusserer, oder als drei äussere Aehnlichkeitspunkte (Erkl. 108).

Frage 47. Welche Beziehungen bestehen zwischen zwei ähnlichen Figuren in schiefer Lage?

Figur 20.



Erkl. 120. In den Figuren 12 bis 15 ist jeweils S der zusammenfallende Punkt S_1 und S_2 beider Figurensysteme. Wird nun die zweite Figur beliebig von ihrem Platze bewegt, so kann nicht mehr derselbe Punkt S der gemeinsame sein, denn S_1 bleibt auf seiner Stelle, S_2 aber wird bewegt. Dabei müssen aber an anderen Stellen je zwei andere Punkte der beiden Figuren zur Deckung gelangen. Diese zu finden und ihre Bedeutung zu erörtern ist der Zweck der vorliegenden Frage.

Antwort. 1) Sind $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zwei ähnliche Dreiecke oder Teildreiecke zweier ähnlichen Figuren, so kann man zusammenfassen etwa $\alpha_1 = \alpha_2$. Bringt man also die Schenkel dieser Winkel zum Schnitt, so müssen die Winkelscheitel A_1 und A_2 mit den Schnittpunkten E und F auf demselben Kreise um Mittelpunkt M liegen, nämlich wegen der gleichen Peripheriewinkel:

$$DA_1F = DA_2F = \alpha.$$

Bringt man ebenso die Schenkel der gleichen Winkel $\beta_1 = \beta_2$ zum Schnitt, so müssen auch deren Schnittpunkte E und F auf demselben Kreise um N liegen mit den Scheiteln B_1 und B_2 wegen der gleichgrossen Peripheriewinkel β_1 und β_2 bezw. der supplementären Peripheriewinkel DB_1E und DB_2E.

2) Bringt man die zwei Kreise um M und N zum zweitenmal zum Schnitt im Punkt S, so ist nach Satz 37 des IV. Teiles $\sphericalangle A_1SB_1 = A_2SB_2$; ausserdem als Peripheriewinkel im Kreise um M $SA_1D = SA_2D$ und im Kreise um N $SB_1D = SB_2D$, folglich auch die Nebenwinkel $SA_1B_1 = SA_2B_2$ und die Summen:

$$SA_1C_1 = SA_2C_2,\quad SB_1C_1 = SB_2C_2.$$

3) Demnach sind $SA_1B_1C_1$ und $SA_2B_2C_2$ zwei Vierecke mit lauter gleichen Winkeln in gleicher Reihenfolge, d. h. zwei ähnliche Vierecke mit gemeinsamem oder selbstentsprechendem Punkte S.

In diesen sind entsprechende Teilstrecken, und zwar hier als Diagonalen, die Seiten A_1B_1 und A_2B_2, ebenso die Geraden von S nach entsprechenden Punkten, also SA_1 und SA_2, SB_1 und SB_2, SC_1 und SC_2; von je zwei solchen gelten die sämtlichen Beziehungen der Antwort der Frage 41, 3), 5), 7). Der Punkt S heisst Aehnlichkeitspunkt.

4) Es verhält sich demnach:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = \cdots$$
$$= A_1B_1 : A_2B_2 = \cdots = \varkappa,$$

nämlich gleich dem Verjüngungsmasstab von $A_1B_1C_1$ zu $A_2B_2C_2$. Da ausserdem auch: $\sphericalangle A_1SA_2 = B_1SB_2$,

so folgt, dass auch die Dreiecke:

$$SA_1A_2 \sim SB_1B_2 \sim SC_1C_2 \cdots$$

ähnlich sind, welche gebildet werden aus dem Aehnlichkeitspunkt mit je zwei entsprechenden Punkten beider Figuren, und zwar mit dem Verjüngungsmassstab $\varkappa$ als Verhältnis der einschliessenden Seiten des $\sphericalangle S$; und letzterer Winkel bleibt stets gleich dem Winkel bei D (zwischen A_1B_1 und A_2B_2) oder E oder F.

5) In diesem Sinne entspricht dem Punkte M, als dem Mittelpunkt des Umkreises für das Dreieck SA_1A_2, der Punkt N als Mittelpunkt des Umkreises für das Dreieck SB_1B_2, so dass auch:

$$SM : SN = SA_1 : SB_1,$$

also:

$$\triangle SA_1M \sim SB_1N, \quad SA_2M \sim SB_2N,$$
$$\triangle SMN \sim SA_1B_1 \sim SA_2B_2;$$

denn:

$$\sphericalangle MSN = B_1SN + MSB_1 = A_1SM + MSB_1$$
$$= A_1SB_1 = A_2SB_2.$$

6) Wird um den Punkt S die eine der Figuren $A_1B_1C_1$ oder $A_2B_2C_2$ soweit gedreht, dass SA_1 mit SA_2 in gleicher oder entgegengesetzter Richtung zusammenfällt, so erhalten die beiden Figuren die perspektivische Lage; und zwar wird S im erstern Falle innerer, im letztern äusserer Aehnlichkeitspunkt. Man erhält also die Aussage:

Satz 20. Zu zwei gleichwendig ähnlichen Figuren gibt es einen (sich selbst entsprechenden) Aehnlichkeitspunkt, welcher mit

Erkl. 121. Ebenso wie A_1A_2 mit D und F auf einem Kreise liegen und B_1B_2 mit E und F auf einem Kreise, müssen auch die Punkte C_1C_2 mit EF auf einem Kreise liegen wegen der gleichen Winkel γ bezw. der supplementären Peripheriewinkel FC_1E und FC_2E. Und dieser Kreis muss ebenfalls durch denselben Punkt S gehen, wie die beiden vorigen, denn es sind auch gleiche Peripheriewinkel $FC_2E = FSE$. Ersterer nämlich ist als Aussenwinkel bei C_2 unmittelbar $= \alpha + \beta$, und:

$$FSE = FSD + DSE,$$

wo:

$$FSD = FA_1D = \alpha, \quad DSE = DB_2E = \beta.$$

Erkl. 122. Satz 37 des IV. Teiles lautet:

Die Verbindungslinien des einen Schnittpunktes zweier Kreise mit den beiden Kreisschnittpunkten jeder durch den andern Schnittpunkt gehenden Sekante bilden stets gleichgrosse Winkel.

Der Beweis betrachtet die Dreiecke SA_1B_1 und SA_2B_2. Darin sind als Peripheriewinkel:

$$A_1B_1S = DB_1S = DB_2S = A_2B_2S$$

und

$$B_1A_1S = 180^0 - DA_1S = 180 - DA_2S$$
$$= B_2A_2S.$$

Folglich müssen auch die dritten Winkel der beiden Dreiecke SA_1B_1 und SA_2B_2 einander gleich sein, nämlich $A_1SB_1 = A_2SB_2$.

Erkl. 123. Man erkennt, dass nicht nur die Kreise um M und N, sondern jeder Kreis durch S und D die Seiten A_1B_1 und A_2B_2 in entsprechenden Punkten trifft, ebenso jeder Kreis durch S und E die Seiten B_1C_1 und B_2C_2 und umgekehrt, d. h. auch je zwei entsprechende Punkte der Seiten (etwa C_1A_1 und C_2A_2) liegen auf einem Kreise mit den Punkten F und S. Die Beweisführung ist analog jener in Erkl. 121. Mit je zwei Mittelpunkten zweier solchen Kreise bildet S ein Dreieck, das ähnlich ist den Dreiecken des Punktes S mit den entsprechenden Punktepaaren beider Figuren (vergl. Abschnitt 5 nebenstehender Antwort).

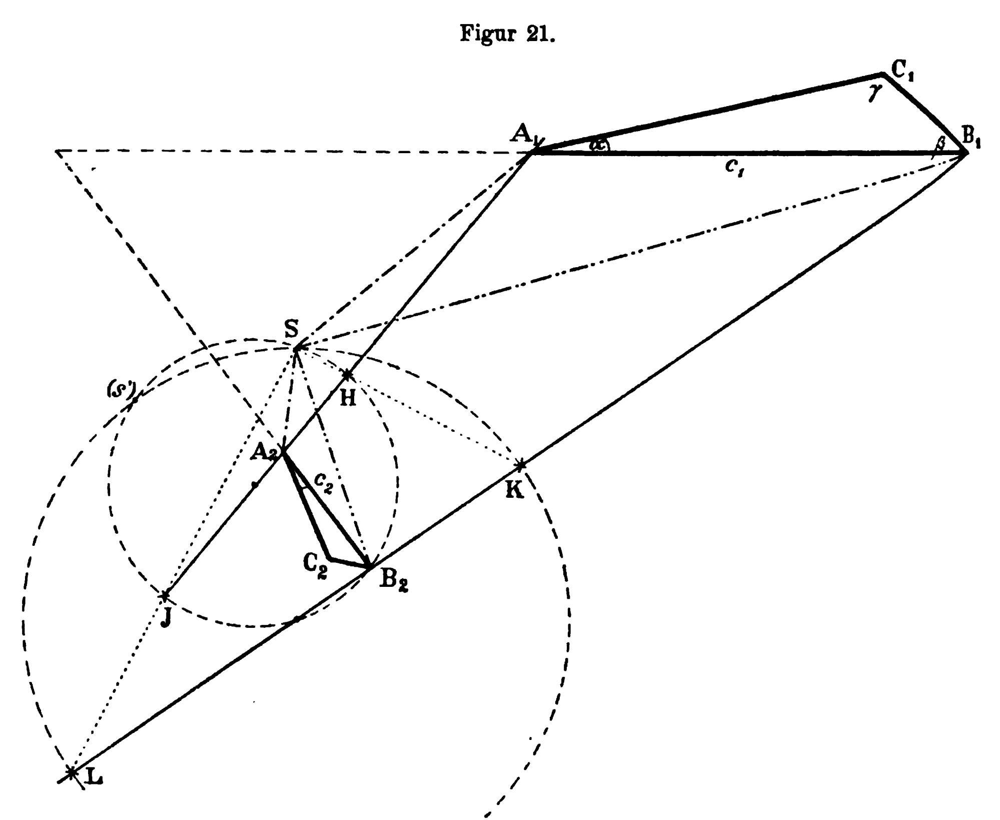
Erkl. 124. Wäre $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, so fiele D unendlich fern, die Kreise durch A_1A_2 und B_1B_2 werden zu geraden Verbindungslinien dieser Punkte, S wird zu deren Schnittpunkt, dem Aehnlichkeitspunkt zweier in perspektivischer Lage befindlichen Figuren. — Würde $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, so müsste wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $SA_1A_2 \sim SB_1B_2$ auch SA_1 mit SB_1, SA_2 mit SB_2, SM mit SN zusammenfallen, also Punkt S mit D, d. h. die Kreise um M und N berühren einander in D.

Erkl. 125. Nach der verallgemeinerten Anschauungsweise ist Punkt S gleichzeitig als Punkt S_1 zu Figur $A_1B_1C_1$, sowie als Punkt S_2 zur Figur $A_2B_2C_2$ anzusehen. Während aber jedem Punkt des ersten Systems ein anderer Punkt des zweiten Systems entspricht, so ist der zu S als zu S_1 entsprechende Punkt S_2 wieder S selbst und ebenso der zu S als zu S_2 entsprechende Punkt S_1 wieder S. Daher heisst S ein sich selbst zugeordneter Punkt.

Für die nebenstehend gefundenen Aehnlichkeitspunkte zweier ähnlichen Figuren in schiefer Lage behalten auch die unter 2) und 6) der Antwort der Frage 41 aufgestellten Aussagen allgemein Gültigkeit, so dass nur noch die Punkte 1) und 4) der Antwort der Frage 41 auf die perspektivische Lage beschränkt bleiben.

je zwei entsprechenden Strecken beider Figuren gleichwendig ähnliche Teildreiecke bildet vom Längenverhältnis entsprechender Strecken der Figuren selbst; und ebenso mit je zwei in beiden Figuren entsprechenden Punkten ähnliche Dreiecke mit konstanten Winkeln gleich dem Winkel je zweier entsprechenden Strecken beider Figuren und mit Längenverhältnis der einschliessenden Seiten gleich dem Verhältnis der Figuren selbst.

Figur 21.



Frage 48. Gibt es auch für ungleichwendig ähnliche Figuren einen Aehnlichkeitspunkt, und wie könnte ein solcher gefunden werden?

Erkl. 126. Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in Figur 21 sind ungleichwendig ähnlich, weil beim Umlauf AB, β, BC, γ, CA, α das

Antwort. 1) Sind $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in Figur 21 zwei ungleichwendig ähnliche Figuren, und gäbe es einen Punkt S, für welchen, wie in Satz 20, die Figuren $SA_1C_1B_1$ und

Innere der Figur einmal links und das zweitemal rechts von der Umlaufsrichtung gelegen ist: die Umdrehungsrichtung des Winkels ist das erstemal entgegengesetzt dem der zweiten. Solche Figuren können nicht in perspektivische Lage gebracht werden, ohne dass die eine der beiden Figuren umgeklappt wird um eine beliebige Symmetrieachse. Dasselbe gilt aber auch für die Vierecke $SA_1B_1C_1$ und $SA_2B_2C_2$, welche beide bei A einen stumpfen, bei B einen spitzen Winkel, aber je mit entgegengesetzter Umdrehungsrichtung besitzen.

Erkl. 127. Satz 12 des VI. Teiles lautet:

Der geometrische Ort für einen Punkt, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten A, B ein bestimmtes Verhältnis $b:a$ haben, ist der Halbkreis über der Verbindungsstrecke derjenigen Punkte PQ, welche die Strecke AB innen und aussen nach jenem Verhältnis $b:a$ harmonisch teilen.

Erkl. 128. In Figur 21 ist $c_1 = 3 \cdot c_2$ gewählt, folglich die Teilungen A_1A_2 und B_1B_2 auch innen und aussen wie $3:1$, also innen $\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$, aussen $\frac{3}{2}:\frac{1}{2}$, nämlich:

$$HA_1 : HA_2 = JA_1 : JA_2 = 3:1$$

und

$$KB_1 : KB_2 = LB_1 : LB_2 = 3:1.$$

Da aber auch:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = 3:1,$$

so teilen H, J, K, E die Grundseiten der Dreiecke A_1SA_2 und B_1SB_2 im Verhältnis der anstossenden Seiten, folglich sind SH, SJ, SK, SL die Winkelhalbierenden der Innen- und Aussenwinkel dieser Dreiecke am Punkte S, nämlich:

$$\sphericalangle A_1SH = A_2SH, \quad \sphericalangle B_1SK = B_2SK,$$
$$\sphericalangle HSJ = 90^0 = \sphericalangle KSL.$$

Da aber auch $\sphericalangle A_1SB_1 = A_2SB_2$, so muss die Winkelhalbierende von $\sphericalangle A_1SA_2$ mit der Winkelhalbierenden von B_1SB_2 zusammenfallen, d. h. H und K, sowie J und L liegen je auf derselben Geraden durch S.

Erkl. 129. Da HK einerseits mit SB_2 denselben Winkel bildet, wie anderseits mit SB_1, so sind SHK und SJL zwei selbstentsprechende Geraden der beiden Figuren $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$. Wird also die Gerade SK oder SL (als ganze Gerade) als eine Linie der Figur $A_1B_1C_1\cdots$ betrachtet, so ist die entsprechende Gerade der Figur $A_2B_2C\cdots$ wieder dieselbe Gerade. Aber S ist der einzige sich selbstentsprechende Punkt dieser Geraden. Jedem andern Punkte der Geraden entspricht ein verschiedener Punkt derselben Geraden.

Erkl. 130. Man beachte wohl, dass bei Figur 20 keine selbstentsprechenden Geraden

$SA_2C_2B_2$ ungleichwendig ähnliche Figuren wären, so müsste jedenfalls sein:

$$SA_1B_1 \sim SA_2B_2,$$
$$SA_1 : SB_1 : A_1B_1 = SA_2 : SB_2 : A_2B_2,$$
$$\sphericalangle A_1SB_1 = A_2SB_2 \text{ u. s. w.}$$

Dann muss aber auch:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2 = c_1 : c_2.$$

2) Nun liegt aber nach Satz 12 des VI. Teiles Punkt S wie alle Punkte, für welche $SA_1 : SA_2$ einen bestimmten Wert hat, auf dem apollonischen Kreise, welcher die Strecke A_1A_2 im gegebenen Verhältnis $c_1 : c_2$ aussen und innen senkrecht teilt; ebenso muss derselbe Punkt S auf demjenigen Kreise liegen, welcher die Strecke B_1B_2 aussen und innen im Verhältnis $c_1 : c_2$ senkrecht teilt. Also ist S ein Schnittpunkt dieser beiden „Apollonischen Kreise“. Nun hat aber der in voriger Antwort gefundene Punkt S schon die Eigenschaft, dass für ihn:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2$$

ist, also muss der hier zu suchende Punkt der zweite Schnittpunkt der genannten zwei apollonischen Kreise sein.

3) Für den so gefundenen neuen Punkt S gilt also:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2.$$

Folglich erhält man durch Umstellung:

$$SA_1 : SB_1 : A_1B_1 = SA_2 : SB_2 : A_2B_2,$$

und demnach:

$$\triangle SA_1B_1 \sim SA_2B_2, \quad \sphericalangle A_1SB_1 = A_2SB_2,$$
$$\sphericalangle SA_1B_1 = SA_2B_2, \quad \sphericalangle SB_1A_1 = SB_2A_2.$$

4) Da aber auch $\sphericalangle \alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, so muss auch:

$$\sphericalangle SA_1C_1 = SA_1B_1 + \alpha_1 = \sphericalangle SA_2B_2 + \alpha_2 = SB_2C_2$$

und ebenso:

$$\sphericalangle SB_1C_1 = SB_2C_2$$

sein, also sind überhaupt $SA_1C_1B_1$ und $SA_2C_2B_2$ ähnliche Figuren mit entgegengesetzter Umlaufsrichtung, und man erhält die Aussage:

Satz 20a. Zu zwei ungleichwendig ähnlichen Figuren gibt es einen (sich selbstentsprechenden) Aehnlichkeitspunkt, welcher mit je zwei entsprechenden Strecken beider Figuren ungleichwendig ähnliche Teildreiecke

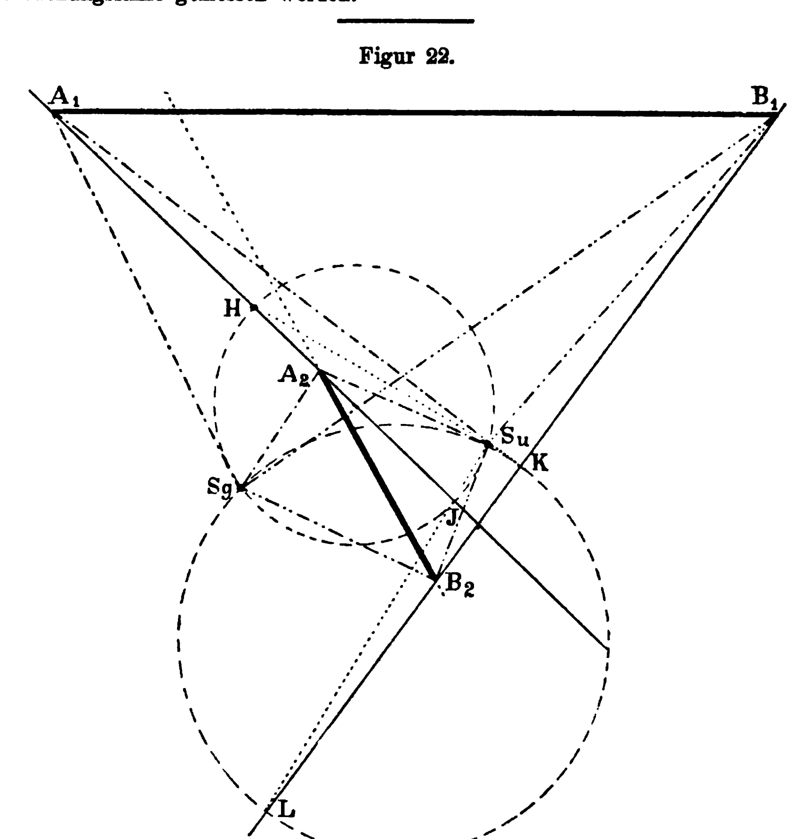
der beiden Figuren sich ergeben konnten, da zwei entsprechende Geraden der beiden Figuren stets den Winkel $A_1SA_2 = B_1SB_2 = \sphericalangle (c_1c_2)$ miteinander bilden mussten:

Gleichwendig ähnliche Figuren haben also keine ungleichwendig ähnliche Figuren, dagegen haben zwei (zu einander senkrechte) selbstentsprechende Geraden durch den Aehnlichkeitspunkt.

Dagegen gehen beim letztern Falle die Kreise mit den gleichen Peripheriewinkeln bei A_1 und A_2 nicht mehr durch S und den Schnittpunkt von A_1B_1 und A_2B_2, weil eben diese Winkel nicht mehr im gleichen, sondern im entgegengesetzten Drehungssinne gemessen werden.

bildet vom Längenverhältnis entsprechender Strecken der Figuren selbst. Durch ihn gehen zwei zu einander senkrechte selbstentsprechenden Geraden beider Figuren.

Figur 22.



Frage 49. Welche Anwendung auf zwei vollständig beliebige Strecken A_1B_1 und A_2B_2 gestatten die Ergebnisse der beiden vorigen Antworten?

Erkl. 181. In Figur 22 ist der gleichwendig gelegene Aehnlichkeitspunkt mit S_g bezeichnet. Derselbe ist der Punkt S, welcher nach der ersten Art wie nebenstehend, in Figur 20 gefunden war und in Figur 21 als S' angedeutet ist.

Antwort. 1) Die Sätze 20 und 20a liefern zusammengefasst für zwei beliebige Strecken die folgende Aussage:

Satz 20 b. Zu zwei beliebigen Strecken gibt es sowohl einen gleichwendig gelegenen, als auch

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

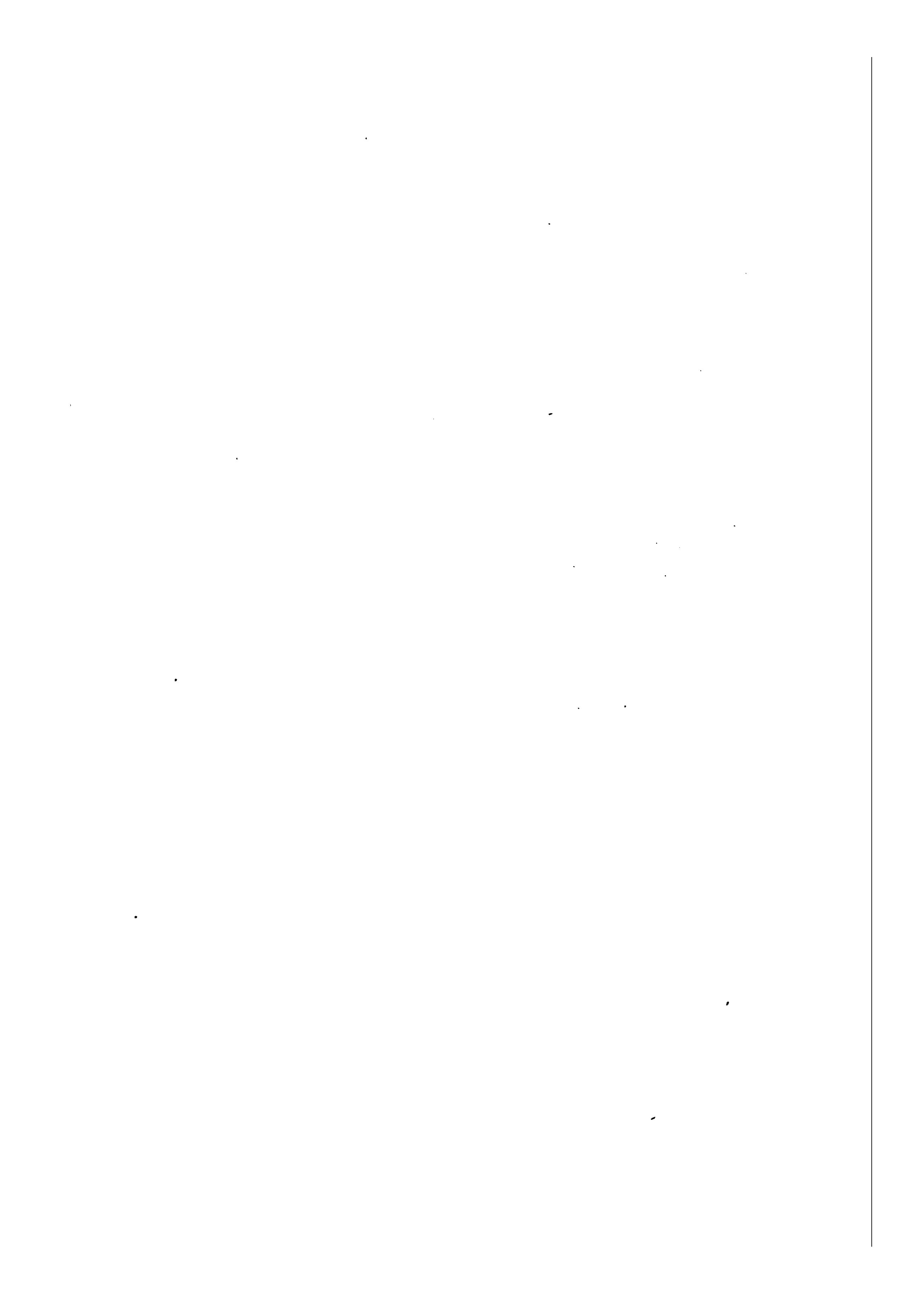
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



1319. Heft

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1318. — Seite 49—64.
Mit 7 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Forts. v. Heft 1318. — Seite 49—64. Mit 7 Figuren.

Inhalt:
Ueber Dreieckstransversalen: die Sätze von Menelaos und Ceva. — Ueber die Anwendung der Sätze von Menelaos und Ceva.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten etc.**, so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben beigegeben, welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft** keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten** eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten und belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und **mit Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Der ungleichwendig gelegene Aehnlichkeitspunkt ist in Figur 22 mit S_u bezeichnet: er ist in Figur 21 als S gefunden worden. Ueber mehrere Einzelbeziehungen in den Figuren 20 bis 22 sehe man die Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Erkl. 182. Entsprechende Punkte zweier Strecken sind solche Punkte, welche die Strecken nach demselben Verhältnisse teilen. So die Mittelpunkte, die Punkte gleichen Abstandsverhältnisses im Innern oder Aeussern der Strecken. In erweiterter Anschauungsweise können als entsprechende Punkte auch Punkte ausserhalb der Strecken gelten, wenn solche mit deren Endpunkten ähnliche Dreiecke bilden. Dadurch wird Figur 22 auf die Figuren 20 bezw. 21 zurückgeführt.

Erkl. 183. In Figur 22 ist ebenfalls wie in Figur 21 das Verhältnis $A_1B_1 : A_2B_2 = 3 : 1$ gewählt. Dabei ist aber der Winkel der Strecken A_1B_1 und A_2B_2 ein grösserer als in Figur 21, und dadurch sind die Punkte S_g und S_u weiter auseinandergerückt. Jedenfalls muss stets der eine dieser beiden Punkte im Winkel (A_1B_1, A_2B_2), der andere im Nebenwinkel desselben liegen.

einen ungleichwendig gelegenen Aehnlichkeitspunkt, welcher je mit den beiden Strecken gleich- bezw. ungleichwendig ähnliche Dreiecke bildet vom Verhältnis gleich dem der gegebenen Strecken.

2) Die beiden Punkte S_g und S_u sind die beiden Schnittpunkte der zwei apollonischen Kreise, welche die Verbindungsstrecken entsprechender Endpunkte A_1A_2 und B_1B_2 innen und aussen im Verhältnis der entsprechenden Strecken senkrecht teilen.

Der erstere Punkt S_g entsteht ausserdem auch als gemeinsamer Schnittpunkt der sämtlichen Kreise durch je zwei entsprechende Winkelscheitel und die beiden Schnittpunkte ihrer entsprechenden Schenkel. — Der letztere Punkt S_u entsteht ausserdem auch als Schnittpunkt beider Geraden, welche sämtliche Verbindungsstrecken je zweier entsprechenden Punktepaare innen und aussen im Verhältnis der beiden Strecken A_1B_1 und A_2B_2 teilen.

3) Verbindungsstrecken der Punkte S mit zwei entsprechenden Punkten beider Strecken stehen stets im gleichen Verhältnisse, wie die gegebenen Strecken selbst. Und der Winkel zweier Verbindungsstrecken ist für S_g stets gleichgross, nämlich gleich dem Winkel der Strecken; für S_u bilden je zwei solche Verbindungsstrecken gleichgrosse Winkel mit zwei festen, sich selbst zugeordneten Strahlen durch S_u.

6) Ueber Dreieckstransversalen: die Sätze von Menelaos und Ceva.

Frage 50. Was versteht man unter einer Transversale eines Dreiecks?

Erkl. 184. Eine Transversale kann nie alle drei Dreiecksseiten in innern Punkten treffen, auch nicht nur eine einzige, sondern nur entweder zwei Seiten innen und die dritte aussen, oder alle drei Seiten aussen: Betrachtet man also die Schnittpunkte als Teilungspunkte der Seiten, so hat man entweder zweimal innern Teilpunkt und einmal äussern, oder dreimal äussern Teilpunkt.

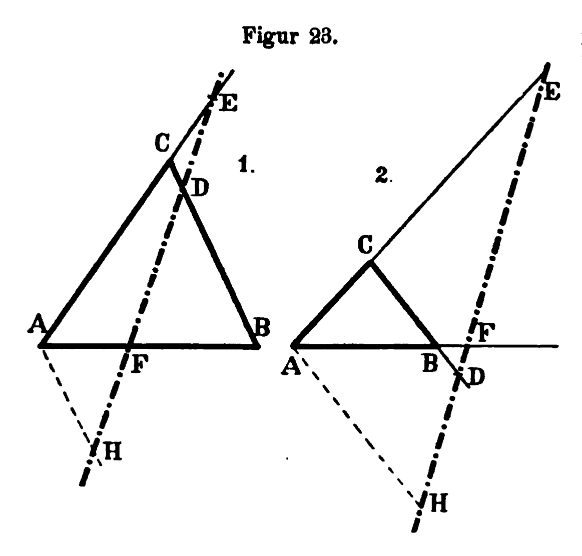
Antwort. Unter einer Transversale eines Dreiecks oder einer Figur überhaupt versteht man jede gerade Linie, welche zu dem Dreieck oder der Figur in Beziehung gesetzt ist. Die Transversale schneidet also jede Seite des Dreiecks entweder innerhalb oder ausserhalb. Geht die Transversale durch einen Eckpunkt

Erkl. 185. Ein solcher äusserer Teilpunkt rückt ins Unendliche, wenn die Transversale einer Seite parallel ist; er fällt in den einen Eckpunkt der Seite, und zwar gleich für zwei Seiten, wenn die Transversale Ecktransversale ist.

des Dreiecks, so heisst sie auch **Ecktransversale.**

Frage 51. Welche Beziehung besteht zwischen den Abschnitten einer beliebigen Dreieckstransversale?

Figur 23.



Antwort. Sind D, E, F die Schnittpunkte einer beliebigen Transversale mit den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks, so besteht die merkwürdige Beziehung:

Satz 21. Werden die drei Seitenlinien eines Dreiecks von einer beliebigen Geraden geschnitten, so sind die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitte gleichgross (Satz des Menelaos).

Beweis I.

Zum Beweise ziehe man durch irgend einen der Eckpunkte, z. B. durch A, eine Parallele zur Gegenseite. Dann werden sowohl die Schenkel des Winkels bei E als auch bei F von den Parallelen $AH \parallel BC$ geschnitten, so dass:

1) $EC : EA = CD : AH$,

2) $FA : FB = AH : BD$.

Durch gliedweise Multiplikation beider Proportionen entsteht unter Wegfall von AH:

$$EC \cdot FA : EA \cdot FB = CD : BD.$$

Und durch Bildung der Produktengleichung der inneren und äusseren Glieder erhält man:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Beweis II.

Etwas übersichtlicher gestaltet sich derselbe Beweis, wenn man statt der einzigen Parallelen zur Gegenseite in Figur 23 drei Parallelen von beliebiger Richtung durch die drei Eckpunkte zum Beweise benützt, also (siehe Figur 24):

$$AH \parallel BJ \parallel CK.$$

Dann wird nämlich:

1) $AF : FB = AH : BJ$,

2) $BD : DC = BJ : CK$,

3) $CE : EA = CK : AH$.

Erkl. 186. Der nebenstehende Satz ist benannt nach seinem Entdecker, einem der Alexandriner Mathematiker, Namens Menelaos, welcher im ersten Jahrhundert nach Christus lehrte (vergl. Klimpert, Gesch. d. Mathematik).

Erkl. 187. Die Abschnitte der Seiten sind in allen vier Figuren 23 und 24, ob nun die Transversale durch den Innenraum oder Aussenraum des Dreiecks geht, die folgenden:

auf c auf a auf b

AF, FB; BD, DC; CE, EA.

In dieser Reihenfolge stösst jeder mit einem vorhergehenden und nachfolgenden an seinen beiden Endpunkten zusammen. Dabei liegt ein äusserer Abschnitt stets mit einem andern derselben Seite auf derselben Strecke, was bei innern Abschnitten nicht der Fall ist. Schreibt man obige sechs Abschnitte in zwei Zeilen mit je einer Lücke:

$$\begin{array}{ccc} AF & BD & CE \\ FB & DC & EA, \end{array}$$

so entstehen von selbst die beiden Gruppen, deren Produkte gleich sind. Man thut deshalb auch beim Anschreiben der Produktengleichheit am besten, die Abschnitte jeder Seite rechts und links vom Gleichheitszeichen je zusammen

anzuschreiben, damit man je zusammenstossende Abschnitte nacheinander schreibt.

Erkl. 138. Der obenstehende Satz des Menelaos ist in anderer Ausdrucksweise bereits aufgetreten in dem Satze der Aufgabe 209 des vorigen VI. Teiles:

> Werden zwei Dreiecksseiten in gegebenen Verhältnissen $m:n$ und $r:s$ geteilt, so schneidet die Verbindungslinie zweier Teilpunkte die dritte Seite unter einem Teilungsverhältnis gleich dem Produkt der beiden anderen.

Ist also in Figur 23 oder 24 gegeben:

$$\frac{AF}{FB} \text{ und } \frac{BD}{DC},$$

und man bringt die Verbindungslinie DF zum Schnitt mit Linie AC im Punkte E, so muss nach diesem Satze:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{CE}$$

sein. Dies liefert aber durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $FB \cdot DC \cdot CE$ genau die nebenstehende Formel:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Erkl. 139. Der zweite Satz der Aufgabe 209 des VI. Teiles liefert die Umkehrung des vorigen Satzes, und diese ist wieder nur eine andere Ausdrucksweise des unten folgenden Satzes 21 a, der Umkehrung des Satzes von Menelaos. Man sehe die weitere Ausführung des Vergleichs in Aufgabe 123 der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles.

Durch gliedweise Multiplikation dieser drei Gleichungen entsteht:

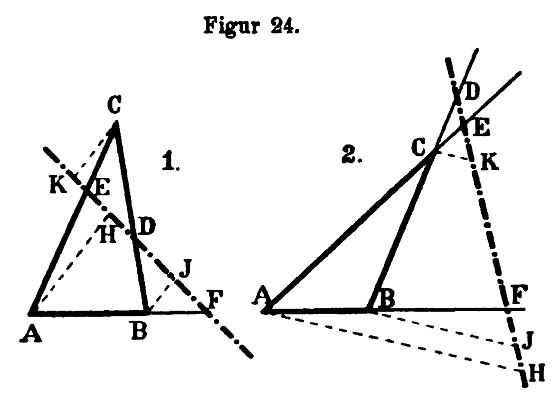
$$AF \cdot BD \cdot CE : FB \cdot DC \cdot EA$$
$$= AH \cdot BJ \cdot CK : BJ \cdot CK \cdot AH,$$

also:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA,$$

wie oben.

Figur 24.



Frage 52. Welche Ausnahmefälle sind für den Satz des Menelaos anzusetzen?

Erkl. 140. Dass die Kürzung einer Gleichung weder mit 0, noch mit ∞ allgemein zulässig ist, geht schon aus folgenden einfachsten Beispielen hervor. Es ist jedenfalls $3 \cdot 0 = 0$ und $5 \cdot 0 = 0$, also sicher $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$, aber gewiss nicht 3 gleich 5.

Ebenso: $3 \cdot \infty = \infty$, $5 \cdot \infty = \infty$, also $3 \cdot \infty = 5 \cdot \infty$, aber gewiss nicht 3 gleich 5.

Erkl. 141. Zur genauern Untersuchung der beiderseitigen Grenzwerte der Gleichung im nebenstehenden ersten Falle setze man den Quotienten der gleich Null werdenden Strecken einzeln an, nämlich:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AF \cdot BD}{FB \cdot EA}.$$

Wird hier $\frac{CD}{CE} = \frac{0}{0}$, so frägt sich, ob in diesem Falle $\frac{0}{0}$ etwa gleich 1 wird, denn nur dann bliebe:

$$1 = \frac{AF \cdot BD}{FB \cdot EA} \text{ oder } AF \cdot BD = FB \cdot EA.$$

Antwort. Die beiden wichtigsten Ausnahmefälle des Satzes von Menelaos sind folgende:

1) Geht die Transversale DEF durch einen Eckpunkt des Dreiecks selbst, z. B. durch C, so fallen die Punkte D und E mit C zusammen, also wird in obiger Formel:

$$CD = 0 \text{ und } CE = 0;\ BD = a,\ AE = b,$$

und es entsteht:

$$AF \cdot a \cdot 0 = FB \cdot 0 \cdot b,$$

also $0 = 0$.

Deswegen ist aber durchaus nicht allgemein $AF \cdot a = FB \cdot b$, denn Kürzung einer Gleichung mit 0 ist nicht statthaft. Diese Gleichung, welche sich auch schreiben lässt als Proportion $AF : FB = b : a$, findet vielmehr nur dann statt, wenn die durch C gehende Transversale CF die Halbierungslinie des Innen- oder Aussenwinkels bei C ist, denn dann wird

Um nun den Wert von $\frac{CD}{CE}$ zu untersuchen für den Augenblick des Uebergangs in den Ausdruck $\frac{0}{0}$, verschiebe man die Transversale DE sich selbst parallel um weniges von der Ecke C weg. Dann behält der Bruch $\frac{CD}{CE}$ vor- und nachher stets denselben Wert von bestimmter Grösse, bloss abhängig von der Richtung der Transversalen. Es kann unmittelbar vorher z. B.:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{1}{3} \text{ (wie etwa in Figur 23, 1)}$$

oder:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{5}{3} \text{ (wie in Figur 24, 1)}$$

oder:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{7}{5} \text{ (wie in Figur 24, 2)}$$

sein, und dann wird auch für $\frac{0}{0}$ in jedem dieser Fälle der Wert $\frac{1}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ oder $\frac{7}{5}$ beizubehalten sein, wenn die Parallelverschiebung die Transversale durch C selbst liefert. Man erhält also dann nicht:

$$\frac{AF \cdot a}{FB \cdot b} = 1,$$

sondern $= \frac{1}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ oder $\frac{7}{5}$, also nicht $AF \cdot a = FB \cdot b$, sondern $AF \cdot a = \frac{1}{3} \cdot FB \cdot b$ bezw. $= \frac{5}{3} \cdot FB \cdot b$ bezw. $= \frac{7}{5} \cdot FB \cdot b$. Und so je einen andern Wert für $\frac{0}{0}$, für jede verschiedene Lage der Transversalen.

Erkl. 142. Da für jede Richtung der Transversalen durch C ein anderer Wert entsteht, so ist wohl zu erwarten, dass für eine bestimmte Lage der Transversalen auch einmal der Wert 1 selbst beizubehalten ist. Dies geschieht, wenn auch bei Parallelverschiebung der Transversalen von C weg $\frac{CD}{CE} = 1$ bleibt, also $CD = CE$ ist, d. h. wenn die Transversale DE als Grundseite mit C als Spitze ein gleichschenkliges Dreieck bildet, ob nun mit Winkel γ oder dessen Nebenwinkel. In jedem dieser Fälle ist die Transversale DE parallel zu einer der beiden Halbierungslinien von γ und dessen Nebenwinkel, also bleibt nur für diese beiden Winkelhalbierenden die Gleichung $AF \cdot a = BF \cdot b$ bestehen, wie schon in nebenstehender Antwort angegeben. In der That weiss man aus Satz 11 des VI. Teiles, dass jede dieser Winkelhalbierenden die Gegenseite c innen oder aussen im Verhältnis der anstossenden Seiten teilt, dass also beidemal:

$$AF : BF = b : a \text{ oder } AF \cdot a = BF \cdot b.$$

$AF = v_c$, $BF = u_c$, und man hat $u_c : v_c = a : b$, also $u_c \cdot b = v_c \cdot a$.

2) Wird die Transversale DEF einer der Dreiecksseiten parallel, z. B. mit b, so fällt Punkt E ins Unendliche, es werden die Abschnitte $AE = \infty$, $CE = \infty$, und die Formel ergibt:

$$AF \cdot BD \cdot \infty = FB \cdot DC \cdot \infty,$$

also $\infty = \infty$.

Hier aber stimmt auch die Gleichung mit beiderseitiger Weglassung der Faktoren ∞, nämlich $AF \cdot BD = FB \cdot DC$. Denn da $DF \parallel AC$ sein soll, so muss nach den Sätzen über Parallelen im Winkel β sich verhalten:

$$AF : FB = CD : DB,$$

also:

$$AF \cdot BD = FB \cdot DC.$$

Erkl. 143. Dass der zweite Ausnahmefall von der besondern Art ist, dass Kürzung mit der Grösse ∞ die Gültigkeit der Gleichung bestehen lässt, kann man folgendermassen nachweisen:

Setzt man wieder für den Quotienten der unendlich werdenden Abschnitte:

$$\frac{AF \cdot BD}{FB \cdot CD} = \frac{AC}{CE} = \frac{\infty}{\infty},$$

so findet sich, dass der im allgemeinen unbestimmte Wert des Bruches $\frac{\infty}{\infty}$ in diesem besondern Falle den Wert 1 behält. Denn auch ohne dass die parallele Lage noch eingetreten ist, hat man:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AC + CE}{CE} = \frac{AC}{CE} + 1.$$

Wird nun AE und $CE = \infty$, so bleibt hier stehen:

$$\frac{AC}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

also hier als Ausnahmefall $\frac{\infty}{\infty} = 1$, so dass die Gleichung entsteht:

$$\frac{AF \cdot BD}{FB \cdot CD} = 1,$$

also:

$$AF \cdot BD = FB \cdot CD,$$

wie oben auch aus anderen Gründen bestätigt wurde.

Frage 53. Welche Umkehrung gestattet der Satz des Menelaos?

Erkl. 144. Die nebenstehende Beweisführung ist eine indirekte; denn es wird nachgewiesen, dass jede Ausnahme von der Behauptung den vorherigen Sätzen widerspricht.

Es wird gerade ein äusserer Teilpunkt (also einer von den drei äusseren im ersten Falle, oder der einzige äussere im zweiten Falle) zum Beweise benützt, damit nicht Zweifel entstehen kann, ob von den Teilpunkten E und E' vielleicht der eine ein äusserer, der andere ein innerer Teilpunkt wäre. Denn dann könnte die Gleichheit $CE' : E'A = CE : EA$ erfüllt werden, ohne dass E und E' zusammenfielen.

Erkl. 145. Der Zusammenstellung: drei äussere, oder ein äusserer und zwei innere Teilpunkte steht gegenüber die andere Gruppe: drei innere oder ein innerer und zwei äussere; auch für letztere besteht eine besondere Beziehung, welche in einem späteren Satze (22a) zum Ausdruck kommt. Im direkten Satze 21 ist diese Unterscheidung nicht nötig, weil keine Teilung der andern Art durch dieselbe Transversale möglich ist.

Antwort. Als Umkehrung des Satzes von Menelaos kann man aussprechen:

Satz 21a. Liegen auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte (und zwar drei äussere, oder ein äusserer und zwei innere) so, dass die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Abschnitte gleichgross sind, so liegen die drei Teilpunkte auf einer Geraden.

Zum Beweise lasse man einen der äussern Teilpunkte, z. B. E, zunächst unbestimmt. Verbindet man D und F durch eine Transversale und bezeichnet deren Schnittpunkt auf AC mit E', so wird jedenfalls:

$$AF \cdot BD \cdot CE' = FB \cdot DC \cdot E'A.$$

Nach Voraussetzung ist aber auch:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Folglich muss auch (durch Division beider Gleichungen):

$$CE : CE' = EA : E'A,$$

oder:

$$CE : EA = CE' : E'A.$$

Nun gibt es aber nur einen einzigen äussern Teilpunkt der Strecke AC, für welchen das Teilungsverhältnis den Wert $CE : EA$ hat, folglich muss E' mit E zusammenfallen auf der Geraden DEF, d. h. D, E, F liegen auf einer Geraden.

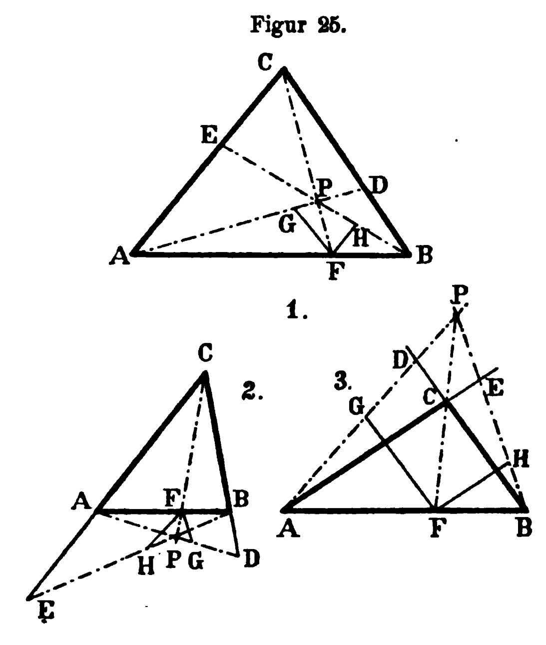
Frage 54. Welche Beziehung besteht zwischen den von drei Ecktransversalen durch denselben Punkt gebildeten Seitenabschnitten?

Erkl. 146. Der nebenstehende Satz ist benannt nach seinem Entdecker, dem italienischen Mathematiker und Jesuiten Tommaso Ceva (sprich Tschewa), welcher 1648 bis 1736 lebte. Ueber anderthalb Jahrhunderte liegen also zwischen der Auffindung der beiden einander so deutlich entsprechenden Sätze 21 und 22.

Antwort. Sind D, E, F die Schnittpunkte dreier durch einen Punkt P gehenden Ecktransversalen mit den Gegenseiten a, b, c eines Dreiecks, so besteht die merkwürdige Beziehung:

Satz 22. Werden die drei Eckpunkte eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte verbunden, so sind die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitte gleichgross (Satz des Ceva).

Figur 25.



Erkl. 147. Man hat zu unterscheiden, ob der Punkt P im Innenraume des Dreiecks, oder im Aussenraume gelegen ist, und zwar im ersteren Falle für alle drei Eckpunkte im Innenwinkel, im letzteren Falle jedenfalls für zwei Eckpunkte im Nebenwinkel, für den dritten aber entweder im Innenwinkel (siehe Figur 25, 2) oder im Scheitelwinkel (siehe Figur 25, 3). Im ersten Falle sind alle drei Schnittpunkte der Seiten innere Teilpunkte, im letzten der beiden Fälle entstehen auf zwei Seiten äussere Teilpunkte, auf der dritten ein innerer (vergl. Erkl. 144). Die Abschnitte werden wieder wie in Erkl. 137 in gleicher Umlaufsfolge geschrieben. Dabei muss man, um diese Umlaufsrichtung einzuhalten, nach einem äussern Teilpunkte hinaus und wieder zur nächtfolgenden Ecke zurück, um von da auf die nächste Seite überzugehen, also:

auf c	auf a	auf b
AF	BD	CE
FB	DC	EA.

Erkl. 148. Man kann den nebenstehenden Beweis I auch in fortlaufender Schlussreihe schreiben, wie folgt:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF}{AB} : \frac{FB}{AB} = \frac{FG}{BD} : \frac{FH}{EA}$$
$$= \frac{EA}{BD} : \frac{FH}{FG} = \frac{EA}{BD} : \left(\frac{FH}{FP} : \frac{FG}{FP}\right)$$
$$= \frac{EA}{BD} : \left(\frac{CE}{CP} : \frac{DC}{CP}\right) = \frac{EA}{BD} : \frac{CE}{DC}$$
$$= \frac{EA \cdot DC}{BD \cdot CE}.$$

Beweis I.

Zum Beweise ziehe man durch irgend einen der Schnittpunkte, z. B. durch F, zu jeder andern Dreiecksseite eine Parallele, also in Fig. 25: $FG \parallel a$, $FH \parallel b$.

Dann ist:

$$FG : BD = AF : AB$$

und

$$FH : EA = BF : BA$$

Und ebenso:

$$FG : DC = PF : PC.$$

und

$$FH : CE = PF : PC.$$

Bei gliedweiser Division dieser entsprechenden Proportionen fällt beim ersten Paar die gemeinsame Grösse AB weg, beim zweiten Paar die ganze rechte Seite, und man erhält als Werte für denselben Bruch $\frac{FG}{FH}$ erst $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{EA}$ und dann $\frac{DC}{CE}$.

Folglich ist:

$$\frac{AF \cdot BD}{FB \cdot EA} = \frac{DC}{CE},$$

also:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Beweis II.

Statt durch den Punkt F Parallelen zu den Seiten zu ziehen, kann man durch eine Ecke, z. B. C, Parallelen ziehen zu den beiden andern Transversalen, also $CJ \parallel AD$, $CK \parallel BE$. Dann wird in ähnlicher Entwicklung wie oben:

$$AJ : AB = DC : DB$$

und

$$BK : BA = EC : EA$$

Und ebenso:

$$AJ : AF = PC : PF.$$

und

$$BK : BF = PC : PF.$$

Bei gliedweiser Division dieser entsprechenden Proportionen fällt wieder beim ersten Paar die gemeinsame Grösse AB, beim zweiten Paar die ganze rechte Seite weg, und man erhält als Werte für denselben Bruch $\frac{AJ}{BK}$ erst $\frac{DC}{CE} \cdot \frac{EA}{BD}$ und dann $\frac{AF}{FB}$. Folglich ist wieder:

$$\frac{DC \cdot EA}{CE \cdot BD} = \frac{AF}{FB},$$

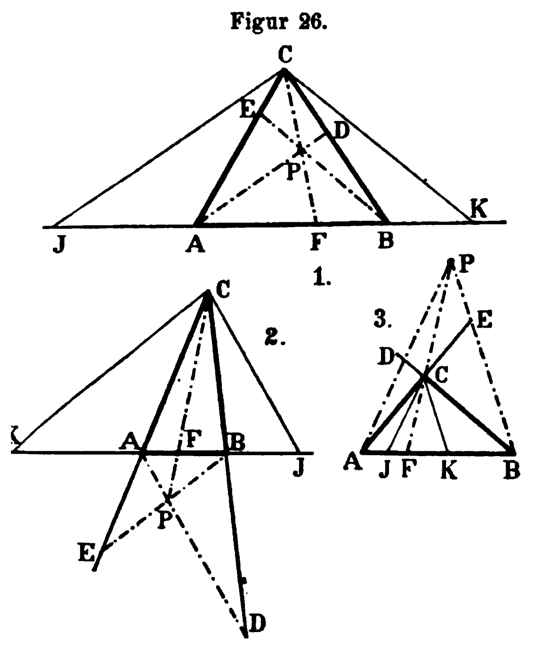
also:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Also:
$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

In ähnlicher Weise könnte auch der nebenstehende Beweis II umgeschrieben werden.

Figur 26.



Erkl. 149. Die Proportion der Dreiecke, wie:
$$APC : BPC = AF : BF$$
als Differenz abzuleiten, wie nebenstehend, geschieht am einfachsten durch Anwendung der „homologen Addition bezw. Subtraktion":
$$AFC : BFC = AF : BF = AFP : BFP$$
liefert zunächst:
$$AFC : AFP = BFC : BFP,$$
dann:
$$(AFC \mp AFP) : AFP = (BFC \mp BFP) : BFP,$$
also:
$$APC : AFP = BPC : BFP;$$
$$APC : BPC = AFP : BFP = AF : BF.$$

Statt dessen kann man letztere Proportion aber auch direkt ableiten, indem man APC und BPC betrachtet als Dreieck mit gemeinsamer Grundseite PC. Dieselben verhalten sich dann wie die Höhen von A und B auf die Linie CF, also nach Satz 7 des VI. Teiles auch wie andere von A und B in paralleler Richtung gegen CF laufende Strecken, also auch wie $AF : BF$.

Erkl. 150. In den Figuren 25 und 26 sind stets alle drei Fälle unterschieden, dass nämlich P im Innenraum, Aussenwinkelraum oder Scheitelwinkelraum des Dreiecks gelegen ist. Dabei kommen auch die verschiedensten Abänderungen bei den Beweisen in Anwendung: Die Proportionalität der Strecken auf den durch die

Beweis III.

Als Dreiecke mit gemeinsamer Spitze und auf gleicher Linie liegenden Grundseiten verhalten sich in Figur 25 oder 26 die Dreiecke:
$$AFC : BFC = AF : BF$$
und ebenso:
$$AFP : BFP = AF : BF,$$
folglich auch die Differenzen oder Summen beider Dreiecke, nämlich:
$$1)\ \triangle APC : \triangle BPC = AF : FB.$$

Genau auf gleiche Weise erhält man aber auch die Verhältnisse:
$$2)\ \triangle BPA : \triangle CPA = BD : DC$$
und
$$3)\ \triangle CPB : \triangle APB = CE : EA.$$

Bei gliedweiser Multiplikation dieser drei Proportionen entsteht aber links der Quotient der gleichgrossen Produkte der drei Teildreiecke, also die Einheit, so dass:
$$1 = AF \cdot BD \cdot CE : FB \cdot DC \cdot EA,$$
also:
$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Beweis IV.

Endlich kann man dasselbe Ergebnis ableiten durch zweimalige Anwendung des Satzes von Menelaos auf Figur 25 oder 26, nämlich für das Dreieck AFC mit der Transversale BPE und für das Dreieck BFC mit der Transversale APD. Dadurch entsteht:
$$AB \cdot FP \cdot CE = BF \cdot PC \cdot EA$$
und
$$BA \cdot FP \cdot CD = AF \cdot PC \cdot DB.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen fallen weg AB, FP und PC, es bleibt:
$$\frac{CE}{DC} = \frac{FB \cdot EA}{AF \cdot BD},$$
also:
$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Parallelen geschnittenen Winkelschenkeln auf gleicher Seite des Scheitels (1), auf verschiedenen Seiten des Scheitels und über den Scheitel selbst weg (II, 2 für $AJ : AF$ und die ähnlichen).

Ferner werden bei III, 2 die Dreiecke APC und BPC nicht durch Subtraktion, sondern durch Addition gebildet; und während sie bei 1 durch die Subtraktion $AFC - AFP$ entstehen, geschieht dies bei 3 durch die umgekehrte $AFP - AFC$. Entsprechend wechseln auch die Richtungen der Parallelen FG, FH bezw. CJ, CK nach verschiedenen Seiten der Linie CFP, je nach der Lage des Punktes P.

Erkl. 151. Der nebenstehende Satz des Ceva ist in andrer Ausdrucksweise ebenfalls schon vorgekommen als Satz in Aufgabe 210 des VI. Teiles:

> Werden zwei Dreiecksseiten durch Ecktransversalen der Gegenecken in gegebenen Verhältnissen $m:n$ und $r:s$ geteilt, so schneidet die dritte Ecktransversale durch den Schnittpunkt der beiden ersten ihre Gegenseite unter einem Teilungsverhältnis gleich dem Produkt der beiden andern.

Ist also in Figur 25 oder 26 gegeben $\frac{AF}{FB}$ und $\frac{BD}{DC}$, so muss nach diesem Satze:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}.$$

Dies ist aber nichts andres als die Formel:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA,$$

wie man durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $FB \cdot DC \cdot EC$ erhält.

Erkl. 152. Man könnte natürlich aus den Sätzen des Menelaos und Ceva auch rückwärts die in den Aufgaben 209 und 210 des VI. Teiles aufgestellten Sätze entnehmen: Denn statt zu sagen, dass drei Punkte auf einer Geraden liegen, kann man auch sagen, dass die Verbindungslinie der beiden ersten durch den dritten geht. Oder statt die Produkte aus je drei Faktoren einander gleichzusetzen, kann man auch den Quotienten zweier davon gleichsetzen dem Quotienten der entsprechenden Paare der anderen.

Frage 55. Welche Ausnahmefälle sind für den Satz des Ceva anzusetzen?

Antwort. Die beiden wichtigsten Ausnahmefälle des Satzes von Ceva sind dieselben, wie jene des Satzes von Menelaos, nämlich folgende:

1) Fällt der Punkt P in eine Dreiecksseite selbst, z. B. nach F auf AB, so werden die Abschnitte:

$$AE = 0, \quad BD = 0, \quad CD = CB = a,$$
$$CE = CA = b,$$

und es entsteht aus der Hauptformel:

$$AF \cdot 0 \cdot b = FB \cdot a \cdot 0,$$

also $0 = 0$.

Deswegen ist aber durchaus nicht allgemein $AF \cdot b = FB \cdot a$, da die Kürzung mit 0 unstatthaft ist. Vielmehr erkennt man unmittelbar, dass es nur für zwei Punkte der Linie c zutrifft, dass $AF : FB = a : b$, nämlich für die zwei (harmonisch zugeordneten) Punkte, welche die Strecke AB innen und aussen im Verhältnis der (nicht anstossenden)

Erkl. 153. Setzt man wieder, wie in Erkl. 141, den Quotienten der gleich Null werdenden Strecken einzeln an, so erhält man:

$$\frac{BD}{EA} = \frac{FB \cdot DC}{AF \cdot CE};$$

und es entsteht die Frage, welchen Wert der Bruch $\frac{BD}{EA} = \frac{0}{0}$ annimmt, also ob:

$$FB \cdot a \gtrless AF \cdot b.$$

Zur Beantwortung derselben verschiebt man den Punkt F über die Linie AB weg hin und her so, dass vor und nachher das Verhältnis $\frac{BD}{EA}$ seinen Wert unverändert behält. Dies geschieht, wie später nachgewiesen wird (vergl. Aufgabe 127 u. flgd. der Aufgabensammlung am Schlusse dieses Teiles), bei Verschiebung des Punktes F auf derjenigen durch F gehenden Geraden, für deren Schnittpunkte X und Y auf a und b die Proportion gilt:

$$\frac{AY}{AC} = \frac{BC}{BX} = \frac{AF}{FB}.$$

Für sämtliche auf a und b entstehenden Abschnitte BD und AE bleibt hierbei das Verhältnis $AE:BD$ konstant, nämlich gleich $AY:BC$ oder $AC:BX$; und dieser Wert ist nach obiger Formel allein abhängig von der Lage des Punktes F auf AB. Und dieser vor und nach dem Durchgang des Punktes F durch AB für den Bruch $\frac{BD}{EA}$ geltende Wert wird dann auch für den Bruch $\frac{0}{0}$ zu setzen sein, wenn nämlich F auf AB zu liegen kommt. Man erhält also je einen andern Wert für $\frac{0}{0}$ für jede verschiedene Lage des Punktes F, nämlich $\frac{0}{0} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{b}{a}$ oder $= \frac{m}{n}$, wenn $m:n$ das Teilungsverhältnis der Seite AB durch Punkt F bedeutet.

Erkl. 154. Da für jede Lage des Punktes F auf AB ein anderer Wert entsteht, so ist zu erwarten, dass für eine bestimmte Lage des Punktes auch einmal der Wert 1 selbst beizubehalten ist. Dies geschieht, wenn auch bei jener Verschiebung von F stets $\frac{BD}{EA} = 1$ bleibt, also $AE = BD$. Dann muss aber oben auch $AY = BC$ und $AC = BX$ sein, so dass:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Dies liefert wieder den schon in nebenstehender Antwort angegebenen Fall, dass Punkt F die Strecke AB (innerlich oder äusserlich) teilt im Verhältnis $AF:FB = a:b$, so dass $AF \cdot b = FB \cdot a$.

Erkl. 155. Die Auffindung desjenigen Punktes F auf AB, für welchen die Gleichung $AF \cdot b = FB \cdot a$ in Geltung bleibt, für welchen also die Kürzung mit 0 nicht zu falschem Ergebnis führt, kann geschehen nach Analogie des Satzes 11 im VI. Teile dieses Lehrbuches: Trägt man nämlich Seite $AC = BG$ von B aus, $BC = AG$ von A aus nach der unteren Seite von AB an, so entsteht wegen gleicher Gegenseiten ein Parallelogramm $ACBG$; und die Halbierungslinie des Innen- oder Aussenwinkels G in diesem Parallelogramm teilt AB in F im Verhältnis der anstossenden Seiten AG und BG, nämlich:

$$AF:BF = AG:BG = BC:AC = a:b,$$

also:

$$AF \cdot b = BF \cdot a.$$

Dreiecksseiten a und b teilen. Für alle übrigen Punkte auf c ist:

$$AF \cdot b \gtrless FB \cdot a.$$

2) Liegt Punkt P so, dass eine der Ecktransversalen, z. B. BE, in Fig. 25,2 oder 26, 2 ihrer Gegenseite parallel wird, so werden die Abschnitte:

$$AE = \infty, \quad CE = \infty,$$

und aus der Hauptformel wird:

$$AF \cdot BD \cdot \infty = FB \cdot DC \cdot \infty,$$

also $\infty = \infty$.

Hier aber stimmt auch die Gleichung mit beiderseitiger Weglassung der Faktoren ∞, nämlich:

$$AF \cdot BD = FB \cdot DC.$$

Denn da $BP \parallel CA$ sein soll, so gilt nach den Sätzen über diese Parallelen in Bezug zum Winkel bei F die Beziehung:

$$AF:FB = AC:PB$$

und ebenso in Bezug zum Winkel bei D die Beziehung:

$$AC:PB = CD:BD,$$

also:

$$AF:FB = CD:BD,$$

oder wie oben:

$$AF \cdot BD = FB \cdot DC.$$

Erkl. 156. Die beiden Ausnahmefälle können aus den Figuren 25 und 26 hervorgehen in folgender Weise: Der erste Fall, dass Punkt P auf eine Dreiecksseite fällt, entsteht aus Figur 25, 1 oder 26, 1 für die Seitenstrecke selbst, aus Figur 25, 2 oder 26, 2 für Seitenstrecke oder Verlängerung, aus Figur 25, 3 oder 26, 3 nur für Seitenverlängerungen. Der zweite Fall dagegen, dass eine der Ecktransversalen ihrer Gegenseite parallel wird, kann nur aus Figur 25, 2 oder 26, 2 unmittelbar hervorgehen.

Frage 56. Welche Umkehrung gestattet der Satz des Ceva?

Antwort. Als Umkehrung des Satzes von Ceva kann man aussprechen:

Satz 22 a. Liegen auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte

(und zwar drei innere, oder ein innerer und zwei äussere) so, dass die Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Abschnitte gleichgross sind, so gehen die Verbindungslinien dieser drei Teilpunkte mit den Gegenecken durch einen Punkt.

Zum Beweise lasse man einen der innern Teilpunkte (z. B. F) zunächst unbestimmt. Verbindet man dann D und E mit ihren Gegenecken, und die Ecke C mit dem Schnittpunkte P von DA und EB, wodurch auf AB ein Punkt F' entsteht, so wird jedenfalls:

$$AF' \cdot BD \cdot CE = F'B \cdot DC \cdot EA.$$

Nach Voraussetzung ist aber auch:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Folglich muss auch (durch Division beider Gleichungen):

$$AF : AF' = FB : F'B,$$

oder:

$$AF : FB = AF' : F'B.$$

Nun gibt es aber nur einen einzigen innern Teilpunkt der Strecke AB, für welchen das Teilungsverhältnis den Wert $AF : FB$ hat, folglich muss F' mit F zusammenfallen auf der Verbindungslinie CP, d. h. C, P, F liegen auf einer Geraden, und die drei Linien AD, BE, CF gehen durch denselben Punkt P.

Erkl. 157. Der nebenstehende Beweis ist ebenso wie jener in Antwort der Frage 53 ein indirekter. Aber dieser wird geführt mittels eines innern (also eines der drei inneren, oder des einzigen innern), um die Zweideutigkeit auszuschliessen, dass:

$$AF' : F'B = AF : FB,$$

ohne dass F und F' zusammenfallen — wenn nämlich F innerer, F' äusserer Teilpunkt wäre.

Erkl. 158. Der Satz 22a bildet die Ergänzung zum Satz 21a, indem dort drei äussere, oder ein äusserer mit zwei inneren Teilpunkten — hier die beiden Zwischenfälle: drei innere, oder ein innerer mit zwei äusseren Teilpunkten auftreten. Erst aus dieser Gegenseitigkeit der Umkehrungen erkennt man deutlicher die Zusammengehörigkeit der direkten Sätze. Denn es bedarf keiner besondern Festsetzung, dass eine Transversale bloss die erste Art, dagegen drei Ecktransversalen durch einen Punkt bloss die zweite Art von Teilpunkten auf den drei Seiten liefern können.

Erkl. 159. Während nach dem vorigen die Umkehrungen (Sätze 21a und 22a) scharf getrennt gehalten werden müssen, kann man die direkten Sätze etwa folgendermassen zusammenfassen:

Satz. Sowohl „durch Schneidung der drei Seiten mit einer Geraden“, als auch
„durch Verbindung der drei Ecken mit einem Punkte“
entstehen solche Seitenabschnitte, dass die Produkte je dreier aufeinander folgenden gleichgross sind.

Frage 57. Wie können die Unterscheidungen der Sätze 21 und 22 rechnerisch zum Ausdruck gebracht werden?

Antwort. Die Unterscheidung zwischen inneren und äusseren Teilpunkten ist numerisch dadurch auszudrücken, dass man auf das Vorzeichen des Teilungsverhältnisses Rücksicht nimmt. Nach den Antworten der Fragen 12 und 13 des VI. Teiles sind als positiv zu rechnen Strecken vom Eckpunkt eines Dreiecks in der Richtung nach dem Innern der Seite (auch über den anderseitigen Eckpunkt hinaus), als negativ Strecken vom Eckpunkt in

Erkl. 160. Es hat etwas der räumlichen Anschauung widerstrebendes, eine Strecke als solche als negative Raumgrösse anzusehen. Bei einem Teilungsverhältnis als absoluter Zahlengrösse dagegen erscheint dieses Bedenken minder erschwerend. Daher ist im nebenstehenden für diesen numerischen Ausdruck der Sätze die Darstellung mit den Teilungsverhältnissen gewählt, obwohl auch für die Produkte selbst die Gleichheit mit entgegengesetztem Vorzeichen behauptet werden könnte. Denn die eine Seite dieser Gleichung wird stets positiv, wenn keine oder zwei negative Strecken eintreten, die andere entsprechend ebenso.

Erkl. 161. Verfolgt man die Teilungen bei Figur 23 bezw. 24 und 25 bezw. 26, so sieht man, dass folgende Teilstrecken die beigesetzten Zeichen erhalten:

1) In Figur 25, 1 und 26, 1 sämtliche Teilstrecken, Produkte und Teilungsverhältnisse positiv bei jeglicher Umlaufsrichtung.

2) In Figur 23, 1 oder 2 und Figur 24, 2 oder 3:

	Figur 23, 1	Figur 23, 2	Figur 24, 2	Figur 24, 3
Umlaufsrichtung ABC				
AF	+	+	+	+
BD	+	−	−	+
CE	−	−	+	−
$AF \cdot BD \cdot CE$	−	+	−	−
FB	+	−	+	+
DC	+	+	+	−
EA	+	+	−	+
$FB \cdot DC \cdot EA$	+	−	−	−
$AF:FB$	+	−	+	+
$BD:DC$	+	−	−	−
$CE:EA$	−	−	−	−
$\frac{AC}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}$	−1	−1	+1	+1
Umlaufsrichtung ACB				
AE	+	+	−	+
CD	+	+	+	−
BF	+	−	+	+
$AE \cdot CD \cdot BF$	+	−	−	−
EC	−	−	+	−
DB	+	−	−	+
FA	+	+	+	+
$EC \cdot DB \cdot FA$	−	+	−	−
$AE:EC$	−	−	−	−
$CD:DB$	+	−	−	−
$BF:FA$	+	−	+	+
$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA}$	−1	−1	+1	+1

der Richtung nach der Verlängerung der Seite. Dem entspricht positives Vorzeichen bei innerer Teilung, negatives bei äusserer Teilung der Seite. Setzt man also, statt die Produkte von je drei nicht aneinanderstossenden Strecken gleichzusetzen, das auf der rechten Seite der Gleichung stehende Produkt als Nenner unter die linke Seite, so erhält man das Produkt der drei Quotienten, welche die Teilungsverhältnisse der drei Seiten in gleicher Umlaufsrichtung darstellen. Und dieses Produkt wird positiv, wenn keine oder zwei, es wird negativ, wenn eine oder drei äussere Teilungen mit eintreten.

Demnach kann man die Sätze 21 und 22 folgendermassen zusammenfassen:

Satz 23. Liegen auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte so, dass entweder sie selbst auf einer Geraden liegen, oder dass ihre Verbindungslinien mit den Gegenecken des Dreiecks durch einen Punkt gehen, so ist das Produkt der drei Teilungsverhältnisse der drei Dreiecksseiten in gleicher Umlaufsrichtung im ersten Falle -1, im zweiten Falle $+1$.

Und umgekehrt:

Satz 23a. Liegen auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte so, dass das Produkt der drei Teilungsverhältnisse der drei Dreiecksseiten in gleicher Umlaufsrichtung entweder -1 oder $+1$ ist, so liegen (im ersten Falle) die drei Teilpunkte selbst auf einer Geraden, oder gehen (im zweiten Falle) die Verbindungslinien der drei Teilpunkte je mit der Gegenecke des Dreiecks durch einen Punkt.

Erkl. 162. Man erkennt deutlich, dass für Berücksichtigung dieses Vorzeichens die Darstellung durch die Quotienten übersichtlicher ist. Dieselbe hat auch den mechanischen Vorteil beim Anschreiben, dass nach Schreibung des Bruchstriches sofort die Faktoren von Zähler und Nenner sich aneinander anreihen. Andererseits aber verliert sich bei der Darstellung durch Quotienten die Beobachtung der wirklichen Grösse der einander (mit oder ohne Vorzeichen) gleichwerdenden Produkte.

Frage 58. Wie bestimmt man den wirklichen Wert der Produkte je dreier nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitte in den Sätzen von Menelaos und Ceva?

Antwort. Man geht aus von den zwei Punkten F und D, bestimmt also E entweder nach Menelaos als Schnittpunkt von b mit FD, oder nach Ceva als Schnittpunkt von b mit der Ecktransversalen von B durch den Schnittpunkt von AD und CF. Ist dabei $m:n$ das Teilungsverhältnis der Seite AB, $n:p$ dasjenige der Seite BC, also:

$$AF:FB = m:n, \quad BD:DC = n:p,$$

so muss in beiden Fällen obiger Voraussetzung, also sowohl für die Konstruktion nach Menelaos als nach Ceva, auf Grund der Sätze 21 bis 23 (oder auch nach frühern) $AE:EC = m:p$ sein, so dass:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{m}{n}\cdot\frac{n}{p}\cdot\frac{p}{m} = 1$$

wird. Demnach ist:

$$AF = \frac{m}{m \pm n}\cdot c; \quad FB = \frac{\pm n}{m \pm n}\cdot c;$$

$$BD = \frac{n}{n \pm p}\cdot a; \quad DC = \frac{\pm p}{n \pm p}\cdot a;$$

$$CE = \frac{p}{p \pm m}\cdot b; \quad EA = \frac{\pm m}{p \pm m}\cdot b;$$

also für jeden der beiden Sätze von Menelaos oder Ceva (bis auf Einzelbestimmung des Vorzeichens):

$$AF\cdot BD\cdot CE = \frac{\pm m\cdot n\cdot p}{(m \pm n)(n \pm p)(p \pm m)}\cdot a\cdot b\cdot c = FB\cdot DC\cdot EA.$$

Oder bezeichnet man die Einzelwerte der Verhältnisse:

$$\frac{m}{n} = u, \quad \frac{n}{p} = v, \quad \frac{p}{m} = w,$$

so entsteht durch Kürzung:

$$AF\cdot BD\cdot CE = \frac{\pm 1}{(u \pm 1)(v \pm 1)(w \pm 1)}\cdot a\cdot b\cdot c = FB\cdot DC\cdot EA.$$

Erkl. 163. Wenn das zweite Teilungsverhältnis in irgend andern Ziffern, als $n:p$, gegeben ist, so kann dasselbe stets durch Erweiterung oder Kürzung beider Glieder ohne Wertänderung so geschrieben werden, dass das erste Glied n heisst.

Erkl. 164. Das Zeichen $\pm$ in den Nennern nebenstehender Brüche bezieht sich auf die verschiedene Teilung: $+$ für innere, $-$ für äussere Teilung, entsprechend dem Ergebnis der Aufgabe 53 im VI. Teile dieses Lehrbuches.

Erkl. 165. Man kann die dritte Grösse w im nebenstehenden Ausdruck eliminieren, indem ja:

$$w = \frac{p}{m} = \frac{p}{n}\cdot\frac{n}{m} = \frac{1}{u\cdot v}$$

ist. Dadurch wird das Produkt zu:

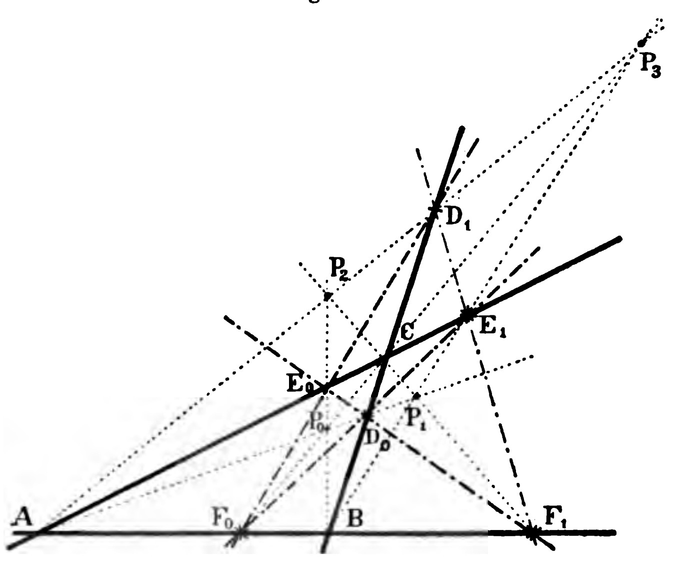
$$\frac{\pm abc}{(u \pm 1)(v \pm 1)\left(\frac{1}{uv} \pm 1\right)} = \frac{\pm u\cdot v}{(u \pm 1)(v \pm 1)(uv \pm 1)}\cdot abc,$$

wobei stets die Vorzeichenbestimmung des Ganzen von der Einzelfigur abhängt.

Frage 59. Welche Ergebnisse entstehen aus den Sätzen 23 und 23a auf Grund der Antwort der Frage 58, wenn man einen oder mehrere der Teilpunkte der Seiten mit dem vierten harmonischen derselben Seite vertauscht?

Antwort. 1) Bei Vertauschung eines Punktes mit seinem vierten harmonischen bleibt der absolute Wert des Teilungsverhältnisses derselbe, jedoch wird das Vorzeichen dieses einen

Figur 27.



Teilungsverhältnisses umgekehrt. Dadurch erhält aber auch das Produkt der drei Teilungsverhältnisse das umgekehrte Vorzeichen, behält aber gleichwohl den absoluten Wert 1. Tritt eine zweite Vertauschung eines der Punkte mit dem vierten harmonischen ein, so wiederholt sich die Umkehrung des Vorzeichens im Produkt zum vorherigen Wert unter Beibehaltung des absoluten Wertes 1, und dasselbe geschieht bei einer dritten Vertauschung. Hat man also eine Figur, für welche der Satz des Menelaos (oder des Ceva) gilt, so entsteht durch eine einmalige oder dreimalige Vertauschung eine Figur, bei welcher der andere Satz des Ceva (bezw. des Menelaos) in Geltung tritt, während bei zweimaliger Vertauschung die Beziehungen desselben Satzes immer in andrer Zusammenstellung der Punkte beizubehalten sind.

2) Dadurch entstehen bei einem Dreieck ABC in Figur 27, wenn drei Punkte auf einer Transversalen (nach Menelaos) gewählt sind, zunächst durch Vertauschung je eines Teilpunktes mit dem vierten harmonischen drei Punkte (nach Ceva), durch deren jeden drei Ecktransversalen gehen; durch Vertauschung je eines zweiten Teilpunktes

Erkl. 166. Wenn BCD_0D_1 auf Seite $a = BC$ in Figur 27 vier harmonische Punkte sind, so sind nach Satz 6 des VI. Teiles auch je vier Geraden von einem Punkte nach diesen vier Punkten BCD_0D_1 vier harmonische Strahlen, wie AB, AC, AD_0, AD_1. Statt also Punkt D_0 mit D_1 zu vertauschen und D_1 mit A zu verbinden, kann man auch Strahl AD_0 mit AD_1 vertauschen und AD_1 mit a zum Schnitt bringen. Dadurch aber wird die Durchführung vollständiger Dualität im zweiten und dritten Teile nebenstehender Antwort ermöglicht, was ohne diese Gegenüberstellung von harmonischen Punkten und harmonischen Geraden nicht so der Fall wäre.

Erkl. 167. Als Beispiel zum zweiten und dritten Teil der nebenstehenden Antwort kann man etwa folgende Reihen wählen:

Anfangsglied	Einmalige Vertauschung			Zweimalige Vertauschung			Dreimalige Vertauschung	
$D_1E_1F_1$	$D_1E_1F_0$	bestimmen	P_3	$D_1E_0F_0$	bestimmen			bestimmen
bestimmen	$D_1E_0F_1$	je einen	P_2	$D_0E_1F_0$	je eine		$D_0E_0F_0$	einen
eine Gerade	$D_0E_1F_1$	Punkt	P_1	$D_0E_0F_1$	Gerade			Punkt P_0
Oder etwa:								
$D_0E_0F_1$	$D_0E_0F_0$	bestimmen	P_0	$D_0E_1F_0$	bestimmen			bestimmen
bestimmen	$D_0E_1F_1$	je einen	P_1	$D_1E_0F_0$	je eine		$D_1E_1F_0$	einen
eine Gerade	$D_1E_0F_1$	Punkt	P_2	$D_1E_1F_1$	Gerade			Punkt P_3
Oder umgekehrt:								
$D_1E_1F_0$ bestimmen	$D_1E_1F_1$	bestimmen		$D_1E_0F_1$	bestimmen	P_2		bestimmen
einen	$D_1E_0F_0$	je eine		$D_0E_1F_1$	je einen	P_1	$D_0E_0F_1$	eine
Punkt P_3	$D_0E_1F_0$	Gerade		$D_0E_0F_0$	Punkt	P_0		Gerade

Und ebenso die anderen (zusammen $4 \cdot 2 = 8$) Fälle. Man sieht, dass jedesmal alle vier Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 und auch alle vier Transversalen $D_1E_1F_1$, $D_1E_0F_0$, $D_0E_1F_0$, $D_0E_0F_1$ nur je in anderen Zusammenstellungen auftreten.

Erkl. 168. Die vorliegende Figur 27 bildet eine Vereinigung der Figuren 74 und 75 des vorigen VI. Teiles. In der ersteren sind die vier Geraden DEF vorhanden ohne die zugehörigen Schnittpunkte P der Ecktransversalen, in der letzteren dagegen die vier Punkte P mit ihren Ecktransversalen ohne die zugehörigen Verbindungsgeraden der Punkte DEF. Figur 27 dagegen weist beide Figurenelemente auf in ihrer durch die Sätze 23 bedingten gegenseitigen Ergänzung und Erzeugung.

Erkl. 169. Ferner stellt dieselbe Figur 27 auch eine Vereinigung der Figuren 82 I und 82 II des VI. Teiles dar, indem die vier Geraden DEF ein vollständiges Vierseit und die vier Punkte P ein vollständiges Viereck bestimmen, deren jedes mit sämtlichen Nebenseiten, Nebenecken, sowie deren harmonischen Beziehungen gezeichnet vorliegt.

Erkl. 170. Man könnte die Ergebnisse nebenstehender Antwort auch einzeln in Sätzen aussprechen; man kann daraus auch die Eigenschaften von harmonischen Punkten und Geraden, die harmonischen Beziehungen des Vierecks, Vierseits und anderer wieder ableiten, also die Ergebnisse der Abschnitte 6 und 7 des VI. Teiles samt den zugehörigen Aufgaben in übersichtlicher Weise wiederholen.

mit dem harmonischen wieder drei Geraden (nach Menelaos), auf deren jeder drei dieser Teilpunkte liegen, und durch Vertauschung auch noch des dritten Teilpunktes wieder ein Punkt (nach Ceva), durch welchen drei Ecktransversalen gehen.

3) Und umgekehrt entstehen bei demselben Dreieck ABC in Fig. 27, wenn drei Ecktransversalen durch einen Punkt (nach Ceva) gewählt sind, zunächst durch Vertauschung je einer Ecktransversalen mit der vierten harmonischen (vergl. Erkl. 166) drei Transversalen (nach Menelaos), auf deren jeder drei Teilpunkte liegen; durch Vertauschung je einer zweiten Ecktransversalen mit der harmonischen wieder drei Punkte (nach Ceva), durch deren jeden drei dieser Ecktransversalen gehen, und durch Vertauschung auch noch der dritten Ecktransversalen wieder eine Transversale (nach Menelaos), auf welcher drei Teilpunkte liegen.

7) Ueber die Anwendungen der Sätze von Menelaos und Ceva.

Frage 60. Worin besteht die nächstliegende Anwendung der Sätze von Menelaos und Ceva?

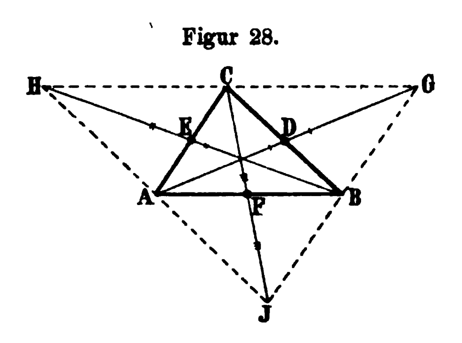
Antwort. Die hervorragendste Anwendung der Sätze von Menelaos und

Erkl. 171. Im Abschnitt C des IV. Teiles dieses Lehrbuches werden vier merkwürdige Punkte des Dreiecks nachgewiesen in der Reihenfolge: Eckenzentrum, Seitenzentra, Höhenpunkt, Schwerpunkt. Im nachfolgenden wird durch die Rücksicht auf leichtere Anwendung die Reihenfolge etwas anders; auch wird ein weiterer merkwürdiger Punkt des Dreiecks nachgewiesen.

Ceva besteht in der Nachweisung der merkwürdigen Punkte des Dreiecks, durch welche mehr als zwei Gerade besonderer Art hindurchgehen, nämlich Schwerpunkt, Höhenpunkt u. s. w., und der mit diesen zusammenhängenden Eigenschaften des Dreiecks.

Frage 61. Welches Ergebnis liefert die Anwendung der Sätze 23 auf die Mittellinien des Dreiecks?

Figur 28.



Erkl. 172. In Figur 28 sind zur Verhütung der Undeutlichkeit die Verbindungslinien der Seitenmitten selbst nicht gezogen. Ferner fällt Linie $D_1 F_1$ in Figur 27 als unendlich ferne aus der Zeichnung weg, und so bleiben von den dreizehn Geraden der Figur 27 nur neun übrig, nämlich die drei Dreiecksseiten und die sechs Seiten des Vierecks $P_0 P_1 P_2 P_3$ bezw. des vollständigen Vierecks aus den vier Punkten $SGHJ$ in Figur 28. Davon sind drei die Schwerlinien, die drei anderen die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die Gegenecken.

Erkl. 173. Die Vergleichung der Figuren 28 und 27 liefert ferner die Bestätigung früherer Angaben rücksichtlich der Eigenschaften harmonischer Punkte und Strahlen: Die zu den Seitenmittelpunkten $D_0 E_0 F_0$ vierten harmonischen Punkte $D_1 E_1 F_1$ sind unendlich fern (siehe Erkl. 101 des VI. Teiles). Ferner bilden die vier von jedem Eckpunkte des Dreiecks ausgehenden Geraden vier harmonische Strahlen, wie z. B. AB, AC, AS, AH oder ebenso auch SA, SB, SF und die Parallele durch S zu c (siehe Antwort der Frage 35 im VI. Teil). Und von eben diesen vier harmonischen Strahlen ist je einer der Gegenseite parallel, weil ein zugeordneter diese Gegenseite halbiert (siehe Andeutung in Auflösung der Aufgabe 147 des VI. Teiles).

Antwort. 1) Sind D, E, F die Mittelpunkte der Seiten a, b, c eines Dreiecks, so wird unmittelbar:

$$AF = FB = \frac{1}{2}c$$

$$BD = DC = \frac{1}{2}a$$

$$CE = EA = \frac{1}{2}b,$$

also durch Multiplikation sofort:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA = \frac{1}{8} \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Und zwar sind die drei Punkte D, E, F sämtlich innere Teilpunkte, alle drei Teilverhältnisse und ebenso ihr Produkt haben positives Zeichen. Folglich gehen die drei Schwerlinien AD, BE, CF durch einen Punkt, den Schwerpunkt.

2) Wird in Fig. 27 P_0 zum Schwerpunkt, so werden:

$$D_0 E_0 \parallel AB, \quad E_0 F_0 \parallel BC, \quad F_0 D_0 \parallel AC,$$

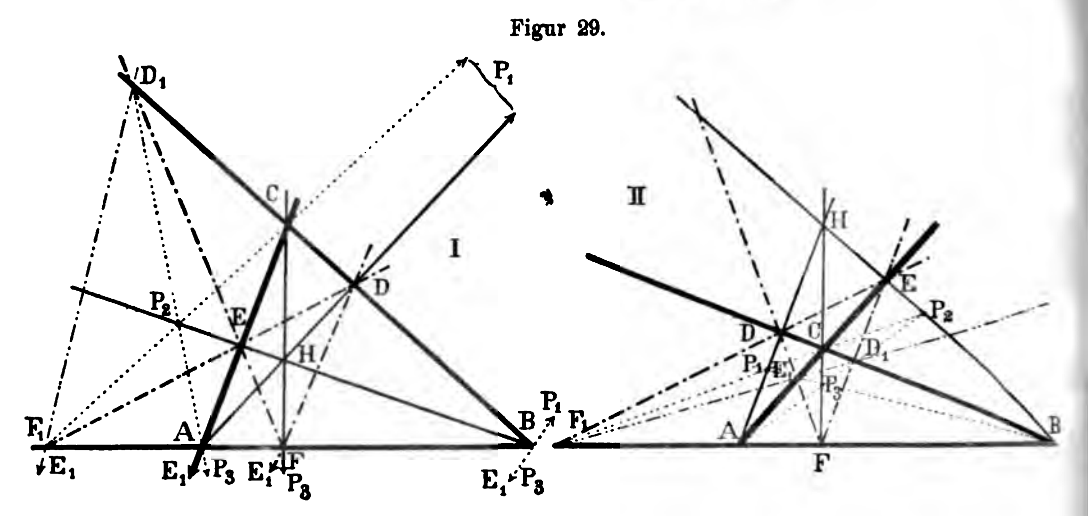
folglich die Schnittpunkte $D_1 E_1 F_1$ unendlich fern, also auch die Linien dahin parallel, nämlich:

$AP_2 D_1 P_3 \parallel a \cdots$ in Figur 28 AHJ
$BP_3 E_1 P_1 \parallel b \cdots$ in Figur 28 BJG
$CP_1 F_1 P_2 \parallel c \cdots$ in Figur 28 CGH,

die Linie $D_1 E_1 F_1$ wird selbst zur unendlich fernen Geraden, und die Punkte $P_1 P_2 P_3$ werden zu den Punkten GHJ der Figur 28, nämlich zu den Gegenpunkten von Parallelogrammen aus zwei Seiten des Dreiecks mit je der dritten Seite als der einen und der zugehörigen Schwerlinie als der andern Diagonale.

3) Der wirkliche Wert des Cevaschen Produktes für den Schwerpunkt ist, wie oben gefunden, gleich $\frac{1}{8} \cdot a \cdot b \cdot c$, also der achte Teil des Produktes der ganzen drei Seiten.

Figur 29.



Frage 62. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 23 auf die Höhen des Dreiecks?

Erkl. 174. Die nebenstehenden Beziehungen zwischen Höhenabschnitten und Seiten fanden sich zuerst im Satz 11 und später in Antwort der Frage 57 bezw. Erkl. 139 des V. Teiles, ferner in Auflösung der Aufgabe 217 des VI. Teiles (mittels der Antiparallelität der Dreiecksseiten mit den Seiten des Fusspunktedreiecks) und endlich entstehen dieselben sofort aus dem Ansatz der Aehnlichkeit der durch die Höhen gebildeten Teildreiecke mit gemeinsamem Winkel:

$\alpha: ACF \backsim ABE$, folglich $b:c = AF:AE$,

$\beta: BAD \backsim BCF$, $c:a = BD:BF$,

$\gamma: CBE \backsim CAD$, $a:b = CE:CD$.

Erkl. 175. Das Fusspunktedreieck liegt beim spitzwinkligen Dreieck ganz im Innern, beim stumpfwinkligen Dreieck umschliesst es den Scheitel des stumpfen Winkels. Daher liegen in Figur 29, I die sämtlichen vierten harmonischen Punkte $D_1 E_1 F_1$ und damit auch die Verbindungsgerade derselben ausserhalb des Dreiecks; in Figur 29, II dagegen liegen D_1 und E_1 auf den Seitenstrecken selbst, nur F_1 ausserhalb, folglich geht die Gerade $D_1 E_1 F_1$ durch das Innere des Dreiecks hindurch.

Erkl. 176. In Figur 29, 1 liegt E_1 ziemlich weit ausserhalb c, da wegen der geringen Längenverschiedenheit von a und c nahezu DF parallel wird mit AC, $D_1 F_1 E_1$, BE_1. Auch P_3 liegt ziemlich entfernt von c, ebenso P_1 von a, doch bleiben auf derselben Geraden je die vier Punkte $AD_1 P_2 P_3$, $BE_1 P_3 P_1$, $CF_1 P_1 P_2$. Das Vierseit der vier Linien DEF (umschliessend den Eckpunkt A) mit a als äusserer Diagonale, sowie das Viereck der vier Punkte HP_{123} (mit einspringendem Winkel bei H)

Antwort. 1) Man hat zu unterscheiden das spitzwinklige und das stumpfwinklige Dreieck. Für beide Fälle gilt nach früheren Ergebnissen, dass:

$$AF : AE = b : c$$
$$BD : BF = c : a$$
$$CE : CD = a : b,$$

also durch Multiplikation:

$$(AF \cdot BD \cdot CE) : (AE \cdot BF \cdot CD) = 1,$$

oder:

$$AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD.$$

Nun sind fürs spitzwinklige Dreieck (Figur 29, I) die sämtlichen Teilpunkte innere (also sämtliche Teilverhältnisse und ebenso ihr Produkt positiv); fürs stumpfwinklige Dreieck aber (Fig. 29, II) entsteht ein innerer und zwei äussere Teilpunkte (ein positives und zwei negative Teilverhältnisse, also positives Produkt), folglich gilt für beide Fälle nach dem Satz 22a des Ceva, dass alle drei Höhen durch einen Punkt gehen.

2) Vergleicht man die Figuren 29 mit Figur 27, so wird P_0 beidemal zum Höhenpunkt H, die drei Geraden D, E, F bilden das Fusspunktedreieck. Und für dieses erhält man die neuen Beziehungen, dass erstens die Schnittpunkte $D_1 E_1 F_1$ die vierten harmonischen zu DEF sind, und dass ferner $D_1 E_1 F_1$ auf einer

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von **Dr. Ad. Kleyer**" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

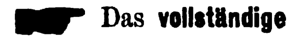
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis
der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

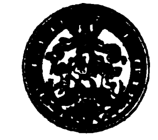
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

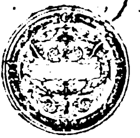
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1336. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1319. — Seite 65—80.
Mit 7 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.): — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Forts. v. Heft 1319. — Seite 65—80. Mit 7 Figuren.

Inhalt:

Ueber die Anwendungen der Sätze von Menelaos und Ceva. — Ueber die sogenannte „Aehnlichkeitsmethode" zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten etc.**, so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften **vorgeführt.**

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln**, Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden** Anwendungen einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen** Verwertungen und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt **der Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird **deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

greifen beide nach unten über den Raum der Zeichnung hinaus; P_2 auf h_b liegt ausserhalb des Dreiecks.

Erkl. 177. In Figur 29, II dagegen erscheinen sämtliche Punkte aus der Figur 27 in ziemlich engem Raum zusammengedrängt: D_1 und E_1 innerhalb der Dreiecksseiten a und b, P_1 auf h_a nahe bei E_1, P_3 auf h_c innerhalb des Dreiecks. Das vollständige Vierseit der Linien DEF (mit c als innerer Diagonale), umschliesst den Eckpunkt C, das vollständige Viereck der Punkte AP_{123} ebenfalls den Punkt C.

Erkl. 178. Durch den Punkt H gehen in beiden Fällen der Figur 29 die drei Höhen. Nun kann man von diesen je zwei einander zuordnen und den vierten harmonischen Strahl zur dritten suchen: und jedesmal geschieht dies durch Verbindung des Punktes H mit einem schon vorhandenen Punkte $D_1E_1F_1$ auf einer der Seiten, nämlich:

$(h_a h_b)$ (h_c mit HF_1); $(h_b h_c)$ (h_a mit HD_1); $(h_c h_a)$ (h_b mit HE_1).

Geraden liegen. Man kann also die Sätze aussprechen:

Satz 24. Jede Seite des Fusspunktedreiecks trifft die zugehörige Dreiecksseite im vierten harmonischen Punkte zu ihrem eigenen Höhenfusspunkte.

Und:

Die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten je mit der zugehörigen Seite des Fusspunktedreiecks liegen in einer Geraden.

3) Ferner werden die Punkte P_{123} gebildet als Schnittpunkte je einer Höhe mit den Verbindungslinien AD_1, BE_1, CF_1. Man kann daher zum vorhergehenden Satze 24 folgenden Zusatz machen:

Satz 24a. Verbindet man jeden Eckpunkt des Dreiecks mit dem Schnittpunkt der zugehörigen Seite des Fusspunktedreiecks und der Gegenseite, so schneiden sich je zwei solche Verbindungslinien auf der dritten Höhe.

Oder:

Die Verbindungslinien der Dreieckspunkte mit den vierten harmonischen Punkten zum Höhenfusspunkt der Gegenseite bilden ein Dreieck, dessen Ecken auf den drei Höhen liegen, während seine Seiten durch die drei Eckpunkte gehen.

Frage 63. Wie berechnet sich der wirkliche Wert des Cevaschen Produktes für den Höhenpunkt des Dreiecks?

Erkl. 179. Die Gleichung $p_a p_b p_c = q_a q_b q_c$ war schon zu erhalten aus Erkl. 69 des V. Teiles. Dort war als Ausdruck des wichtigen Satzes 11 zur Vorbereitung für den pythagoreischen Lehrsatz angesetzt:

$$a p_a = b q_b,$$
$$b p_b = c q_c,$$
$$c p_c = a q_a.$$

Und hieraus entsteht schon durch einfache Multiplikation beider Seiten:

$$abc p_a p_b p_c = abc q_a q_b q_c;$$

durch Kürzung mit abc bleibt also die obige Gleichung, wobei nur die Festsetzung des Wertes für das Produkt noch vorbehalten bleibt.

Antwort. Die Abschnitte der Höhen sind nach früherer Bezeichnung p und q.

Man hat also nach Ceva:

$$p_a \cdot p_b \cdot p_c = q_a \cdot q_b \cdot q_c,$$

und der Wert dieses Produkts kann in den Seiten abc ausgedrückt werden.

Nach Erkl. 82 bezw. 84 des V. Teiles folgt nämlich aus dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatze:

$$p_a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad q_b = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b},$$
$$p_b = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}, \quad q_c = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c},$$
$$p_c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}, \quad q_a = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Erkl. 180. Der Wert des Produktes:

$$p_a p_b p_c = \frac{1}{8abc}(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)$$

stellt die dritte Potenz einer Länge dar: Jede Klammer ist quadratisch, das Produkt aller drei demnach von der sechsten Dimension (vergleiche Erkl. 183 des V. Teiles); und da der Divisor abc selbst von der dritten Dimension ist, so entsteht durch die Division wieder für $p_a p_b p_c$ ein Ausdruck dritter Dimension.

Also durch Multiplikation das Produkt:

$$p_a \cdot p_b \cdot p_c = \frac{1}{8abc}(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2).$$

Und genau denselben Wert erhält:

$$q_a \cdot q_b \cdot q_c.$$

Frage 64. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 23 auf die Mittelsenkrechten des Dreiecks?

Antwort. 1) Sind D, E, F die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten auf Seite c, so ist nach dem Satze des Menelaos:

$$AF \cdot BD \cdot CE \doteq FB \cdot DC \cdot EA.$$

Hierin aber:

$$AF = FB = \frac{1}{2}c,$$

also:

$$BD \cdot CE = DC \cdot EA,$$

oder:

$$AE : BD = CE : CD,$$

oder:

$$AE : EC = BD : DC.$$

Man erhält also:

Satz 25. Die Mittelsenkrechte einer Seite schneidet die beiden anderen Seiten so, dass sich deren untere Abschnitte ebenso verhalten wie die oberen.

Oder:

Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite teilt die beiden anderen Seiten (die eine innen, die andre aussen) im gleichen Verhältnis.

2) Da die drei Radien des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises nach den Eckpunkten durch denselben Punkt O gehen (wie die drei Mittelsenkrechten), so ist auch zu bemerken, dass für die Schnittpunkte dieser Radien mit den Gegenseiten der Satz des Ceva gilt.

Erkl. 181. Ist das Dreieck bei α und β spitz, so dass $\alpha < \beta$, so wird a aussen, b innen getroffen von der Mittelsenkrechten, der obere Abschnitt von a liegt auf der Verlängerung, der untere umfasst a samt der Verlängerung. Wird $\alpha = \beta$, so werden die Seiten gleich, beide oberen Abschnitte Null.

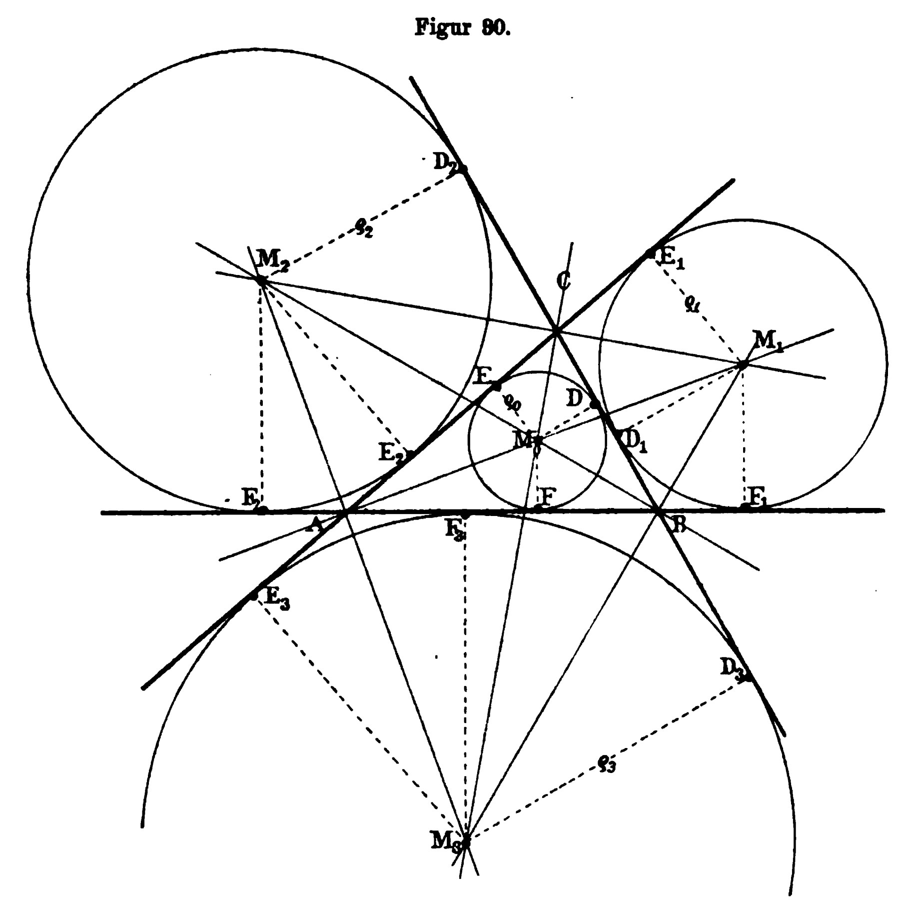
Für $\alpha > \beta$ wird a innen, b aussen geschnitten; für $\alpha = 90^0$ trifft die Mittelsenkrechte a in der Mitte, b im Unendlichen, so dass der Satz in Geltung bleibt, da dem Mittelpunkt einer Strecke als äusserer Teilpunkt mit gleichem Teilungsverhältnis der unendlich ferne zugeordnet ist. Für stumpfen Winkel α oder β wird b oder a in der Verlängerung nach aussen geschnitten, die andere Seite innen.

Erkl. 182. Die Ableitung des Bestehens eines gemeinsamen Schnittpunktes der drei Mittelsenkrechten ist nicht unmittelbar aus dem Satze von Ceva zu entnehmen, da dieselben keine Ecktransversalen sind. Man gründe daher diesen Beweis auf den vorigen mittels der Höhen, wie in Aufgabe 141 am Schlusse dieses Teiles geschehen.

Frage 65. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 23 auf die Winkelhalbierenden des Dreiecks?

Antwort. Von den Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel weiss man (Satz 11 des VI. Teiles), dass sie die Gegenseiten (die Halbierenden der Innen-

Figur 90.



Erkl. 183. Man könnte die nebenstehenden Proportionen auch in der Weise schreiben, dass man setzt $AF:FB = \pm b:a$ — nämlich $+b:a$ für die Innenwinkelhalbierende, $-b:a$ für die Aussenwinkelhalbierende. Dadurch sieht man auch sofort, dass:

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{FB \cdot DC \cdot EA} = \pm 1$$

sind, je nachdem im Produkt verschiedene Faktoren enthalten sind; nämlich $+1$, wenn:

$$+ \cdot + \cdot + \text{ oder } + \cdot - \cdot -$$

auftritt, also für drei innere oder einen innern mit zwei äusseren, dagegen -1, wenn:

$$- \cdot - \cdot - \text{ oder } - \cdot + \cdot +,$$

also für drei äussere oder einen äussern mit zwei inneren.

Erkl. 184. Der erste Teil a) und b) des nebenstehenden Satzes war bereits früher gefunden; dagegen ist c) und d) neues Ergebnis aus den Sätzen von Ceva bezw. Menelaos. — Die Verbindungslinien der Schnittpunkte mit den Gegenecken sind eben die Winkelhalbierenden selbst. Man kann daher den ersten Teil des Satzes auch so aussprechen:

winkel innen, jene der Aussenwinkel aussen) im Verhältnis der anstossenden Seiten teilen. Also:

$$AF : FB = b : a$$
$$BD : DC = c : b$$
$$CE : EA = a : c,$$

also durch Multiplikation sofort:

$$AF \cdot BD \cdot CE : FB \cdot DC \cdot EA = abc : abc = 1,$$

oder:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Demnach sind die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden solche Punkte, für welche die Sätze 23 Geltung haben.

Man erhält daher folgende Aussagen:

Satz 26. Halbiert man Innen- und Aussenwinkel eines Dreiecks, so haben die Schnittpunkte der Halbierungslinien mit den Gegenseiten solche Lage, dass wenn:

a) die drei inneren oder

Bei jedem Dreieck gehen die drei Innenwinkelhalbierenden, sowie je eine Innenwinkelhalbierende und die beiden anderen Aussenwinkelhalbierenden durch einen Punkt (Satz 21 des IV. Teiles).

b) je ein innerer und die zwei anderen äusseren Schnittpunkte mit ihren Gegenecken verbunden werden, diese Verbindungslinien je durch einen Punkt gehen (die Mittelpunkte der In- und Ankreise); dass dagegen

c) je ein äusserer und die zwei anderen inneren und

d) die drei äusseren Schnittpunkte je auf einer Geraden liegen.

Frage 66. Wie berechnet sich der wirkliche Wert des Cevaschen Produktes für die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks?

Erkl. 185. Die Gleichung:

$$u_a u_b u_c = v_a v_b v_c \text{ bezw. } a'b'c' = a''b''c''$$

war bereits aufgestellt in Erkl. 135 des V. Teiles, jedoch nur für die Halbierungslinien der Innenwinkel und ohne die Möglichkeit, die wichtigen Folgerungen dieser Gleichung zu erkennen. Daher sind dort auch die doppelten Vorzeichen nicht berücksichtigt.

Erkl. 186. Der Wert des Produkts:

$$u_a u_b u_c = \frac{a^2 b^2 c^2}{(c \pm b)(c \pm a)(b \pm d)}$$

stellt ebenso wie der frühere Ausdruck für $p_a p_b p_c$ die dritte Potenz einer Länge dar. Denn der Zähler ist von der sechsten Dimension, jede Klammer des Nenners von der ersten, also der ganze Nenner von dritter Dimension, der Quotient ebenfalls von dritter. Man kann in derartigen Ausdrücken die äussere Form der dritten Dimension dadurch zum Erscheinen bringen, dass man den Bruch kürzt: hier durch $cb \cdot ca \cdot ba$. Dadurch wird:

$$u_a u_b u_c = \frac{1}{\left(\frac{1}{b} \pm \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}\right)}.$$

So hat jede Klammer im Nenner die Dimension — 1, der ganze Nenner — 3, der ganze Ausdruck + 3. [Ebenso entsteht oben für $p_a p_b p_c$ durch Ausführung der Division mit abc der Ausdruck:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} - c\right)\left(-a + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b} - b + \frac{c^2}{b}\right),$$

also drei Klammern je von der ersten Dimension; symmetrischer, aber in weniger gefälliger Schreibung kann man mit gleichem Erfolg auch setzen:

Antwort. Die Abschnitte der Winkelhalbierenden auf den Gegenseiten sind nach früherer Bezeichnung u, v, w (oder auch in Antwort der Frage 56 des V. Teiles a', $a'' \cdots$).

Man hat also nach Antwort der Frage 56 (auch Erkl. 135) des V. Teiles:

$$u_a \cdot u_b \cdot u_c = v_a \cdot v_b \cdot v_c.$$

Dabei ist nach Erkl. 135 des V. Teiles wegen der Teilungsverhältnisse, indem man $a < b < c$ ansetzt:

$$u_a = \frac{ab}{c \pm b}, \quad v_a = \frac{ac}{c \pm b}, \quad (v_a \pm u_a = a),$$

$$u_b = \frac{bc}{c \pm a}, \quad v_b = \frac{ab}{c \pm a}, \quad (u_b \pm v_b = b),$$

$$u_c = \frac{ac}{b \pm a}, \quad v_c = \frac{bc}{b \pm a}, \quad (v_c \pm u_c = c).$$

Also durch Multiplikation das Produkt:

$$u_a \cdot u_b \cdot u_c = \frac{a^2 b^2 c^2}{(c \pm b)(c \pm a)(b \pm a)}.$$

Und genau denselben Wert erhält:

$$v_a \cdot v_b \cdot v_c.$$

Dabei gelten im Nenner die folgenden Vorzeichengruppierungen:

Für den Mittelpunkt des Inkreises (innerer Teilpunkt aller drei Seiten)

$$(c + b)(c + a)(b + a),$$

Für den Mittelpunkt des Ankreises an Seite a (innerer Teilpunkt auf a, äusserer auf b und c)

$$(c + b)(c - a)(b - a).$$

Für den Mittelpunkt des Ankreises an Seite b (innerer Teilpunkt auf b, äusserer auf c und a)

$$(c - b)(c + a)(b - a).$$

Für den Mittelpunkt des Ankreises an Seite c (innerer Teilpunkt auf c, äusserer auf a und b)

$$(c - b)(c - a)(b + a).$$

$$\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{a^5}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^5}{ac}}-\sqrt[3]{\frac{c^5}{ab}}\right)\left(-\sqrt[3]{\frac{a^5}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^5}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{c^5}{ab}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{a^5}{bc}}-\sqrt[3]{\frac{b^5}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{c^5}{ab}}\right).$$

Der erste Ausdruck entsteht, indem man die erste Klammer mit c, die zweite mit a, die dritte mit b dividiert. Der zweite Ausdruck durch gleichmässige Division jeder Klammer mit $\sqrt[3]{abc}$. Und darin ist jeder Wurzelausdruck von erster Dimension.]

Frage 67. Wie berechnet sich der Wert des Menelaosschen Produktes für die in gerader Linie liegenden Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit ihren Gegenseiten?

Erkl. 187. Die drei doppelten Vorzeichen in $(c \pm b)(c \pm a)(b \pm a)$ lassen im ganzen acht Gruppierungen zu, nämlich:

		oder	
1	$+ + +$	1	$+ + +$
2	$+ + -$	2	$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ + + -$
3	$+ - +$	3	$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ + - +$
4	$+ - -$	4	$+ - -\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot$
5	$- + +$	5	$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ - + +$
6	$- + -$	6	$- + -\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot$
7	$- - +$	7	$- - +\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot$
8	$- - -$	8	$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ - - -$

Man sieht nun sofort, dass vier davon zur vorigen, die anderen vier zur nebenstehenden Antwort gehören, nämlich zur vorigen alle die mit gerader Anzahl (0 oder 2) Minuszeichen, nämlich 1, 4, 6, 7, zur nebenstehenden die mit ungerader Anzahl (1 oder 3) Minuszeichen, nämlich 2, 3, 5, 8.

Antwort. Der Wert des Produktes ist bis auf das Vorzeichen wieder derselbe wie zuvor, nämlich:

$$u_a u_b u_c = v_a v_b v_c = \frac{a^2 b^2 c^2}{(c \pm b)(c \pm a)(b \pm a)}.$$

Dabei gelten aber jetzt im Nenner die folgenden Vorzeichengruppierungen:

Für den innern Teilpunkt auf a und b, äussern auf c . . . . . $(c+b)(c+a)(b-a)$.

Für den innern Teilpunkt auf b und c, äussern auf a . . . . . $(c-b)(c+a)(b+a)$.

Für den innern Teilpunkt auf c und a, äussern auf b . . . . . $(c+b)(c-a)(b+a)$.

Für den äussern Teilpunkt auf allen drei Seiten . . . . . $(c-b)(c-a)(b-a)$.

Also hier nach Menelaos stets zwei innere und ein äusserer, oder drei äussere, in voriger Antwort nach Ceva stets zwei äussere und ein innerer oder drei innere Teilpunkte.

Frage 68. Welche Ergebnisse liefert die Anwendung der Sätze 23 auf die Berührungspunkte der In- und Ankreise des Dreiecks?

Antwort. Bezeichnet man mit den Indices $_{0123}$ die zwölf zu den vier Kreisen gehörigen Berührungspunkte DEF auf den Seiten a, b, c, so bestehen nach Antwort der Frage 66 oder nach Erkl. 153 und Satz 23 und 24 des IV. Teiles folgende Beziehungen unter den 24 Tangentenabschnitten:

$$1)\quad t_1 = AF_0 = F_3B = BD_3 = D_2C = CE_2 = E_0A = s - a = \frac{1}{2}(-a+b+c),$$

$$2)\quad t_1' = AF_1 = F_2B = BD_2 = D_3C = CE_3 = E_1A = s = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$3)\quad t_2' = AF_2 = F_1B = BD_1 = D_0C = CE_0 = E_2A = s - c = \frac{1}{2}(a+b-c),$$

$$4)\quad t_3' = AF_3 = F_0B = BD_0 = D_1C = CE_1 = E_3A = s - b = \frac{1}{2}(a-b+c).$$

Hieraus ergibt sich nun unmittelbar folgende Reihe von je zwei gleichen Produkten (siehe Figur 31, Seite 71):

1) $AF_0 \cdot BD_0 \cdot CE_0 = F_0B \cdot D_0C \cdot E_0A = (s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$,
2) $AF'_0 \cdot BD_2 \cdot CE_1 = F_0B \cdot D_2C \cdot E_1A = (s-a)\cdot s\cdot(s-b)$,
3) $AF_1 \cdot BD_1 \cdot CE_1 = F_1B \cdot D_1C \cdot E_1A = s\cdot(s-c)\cdot(s-b)$,
4) $AF_1 \cdot BD_3 \cdot CE_0 = F_1B \cdot D_3C \cdot E_0A = s\cdot(s-a)\cdot(s-c)$,
5) $AF_2 \cdot BD_0 \cdot CE_3 = F_2B \cdot D_0C \cdot E_3A = (s-c)\cdot(s-b)\cdot s$,
6) $AF_2 \cdot BD_2 \cdot CE_2 = F_2B \cdot D_2C \cdot E_2A = (s-c)\cdot s\cdot(s-a)$,
7) $AF_3 \cdot BD_1 \cdot CE_2 = F_3B \cdot D_1C \cdot E_2A = (s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-a)$,
8) $AF_3 \cdot BD_3 \cdot CE_3 = F_3B \cdot D_3C \cdot E_3A = (s-b)\cdot(s-a)\cdot s$.

Ordnet man diese Gleichheiten je zweier Produkte nach der fallenden Anzahl der drei-, ein- oder keinmaligen Beteiligung des Inkreises, so treten stets drei oder ein, nie zwei oder keine inneren Teilpunkte auf; also erhält man nach Ceva die Nachweise, dass die Verbindungslinien folgender Punktegruppen je dreier Berührungspunkte mit ihren Gegenecken durch einen Punkt gehen:

wegen 1) $D_0E_0F_0$, also I. AD_0, BE_0, CF_0 durch einen Punkt P_0
wegen 5) $D_0E_3F_2$, also II. AD_0, BE_3, CF_2 durch einen Punkt P_1
wegen 4) $D_3E_0F_1$, also III. AD_3, BE_0, CF_1 durch einen Punkt P_2
wegen 2) $D_2E_1F_0$, also IV. AD_2, BE_1, CF_0 durch einen Punkt P_3
wegen 3) $D_1E_1F_1$, also V. AD_1, BE_1, CF_1 durch einen Punkt Q_1
wegen 6) $D_2E_2F_2$, also VI. AD_2, BE_2, CF_2 durch einen Punkt Q_2
wegen 8) $D_3E_3F_3$, also VII. AD_3, BE_3, CF_3 durch einen Punkt Q_3
wegen 7) $D_1E_2F_3$, also VIII. AD_1, BE_2, CF_3 durch einen Punkt Q_0.

Danach kann man folgende Aussagen machen:

Satz 27. Die zwölf Verbindungslinien der Eckpunkte eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der In- und Ankreise gehen zu je dreien durch einen von acht Punkten, nämlich:

I. Die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises (P_0).

II. bis IV. Die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten je einer Seite mit dem Inkreise und der beiden anderen Seiten mit den zwei Ankreisen auf gleicher Seite der erstern (P_{123}).

V. bis VII. Die Ecktransversalen nach dem Berührungspunkte je eines Ankreises (Q_{123}).

VIII. Die Ecktransversalen nach dem Berührungspunkte des Ankreises der jeweiligen Gegenseite (Q_0).

Und die Werte der Cevaschen gleichen Produkte sind:

Erkl. 188. Um aus den obenstehenden Gleichungen t_1 bis t_3' der Reihe nach die nachfolgenden Gleichungen 1) bis 8) entstehen zu lassen, kann folgendes Verfahren eingehalten werden: Zu AF_0 gehört jedenfalls F_0B, also links $(s-a)$ und rechts $(s-b)$. Kommt dann zu AF_0 noch BD_0 oder BD_2, so entstehen beiderseits gleiche Produkte; würde dagegen zu AF_0 noch BD_1 oder BD_3 gesetzt, so müsste zu F_0B noch D_1C oder D_3C, und das gäbe keine gleichen Produkte mehr. Ebenso bedingt der Anfang mit AF_1 rechterseits den Anfang mit F_1B, also links s, rechts $(s-c)$, folglich muss links noch ein Faktor $s-c$, rechts ein Faktor s und beiderseits ein gleichgrosser hinzukommen, und das geht nur mittels BD_1 oder BD_3, nicht mit BD_0 oder BD_2.

Erkl. 189. Bei der Uebersicht der Gleichungen 1) bis 8) fällt sofort auf, dass der Inkreis nie zweimal beteiligt ist. Aber auch wo der Inkreis keinmal beteiligt ist, tritt doch stets ein, aber auch immer nur ein innerer Teilpunkt auf, nämlich der eine Berührungspunkt des der Seite zugehörigen Ankreises. Daher liegen nie drei der Punkte D_{0123}, E, F auf einer Geraden, sondern jedesmal tritt der Satz von Ceva in Geltung, nie jener von Menelaos.

Erkl. 190. Die Verteilung der Linienarten an Figur 31 ist folgende:

Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises strichpunktiert —·—·—·,

Figur 31.

Ecktransversalen nach den Berührungspunkten eines der Ecke nicht gegenüberliegenden Ankreises gestrichelt — — — —.

Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des der Ecke gegenüberliegenden Ankreises punktiert · · · · ·.

Es gehen also durch P_0 alle drei strichpunktierten Linien —·—·—·,

durch P_{123} je eine strichpunktierte —·—· und zwei gestrichelte — — —,

durch Q_{123} je zwei gestrichelte — — — und eine punktierte · · · · ·,

durch Q_0 alle drei punktierten Linien · · · · ·

Durch jede Ecke gehen eine —·—·—·, eine · · · · ·, aber zwei — — —; und auf jeder solchen Linie liegen zwei Punkte P oder Q, nämlich:

auf jeder —·—· liegt P_0 und ein P_{123},

auf jeder — — — ein P_{123} und ein andrer Q_{123},

auf jeder · · · · · liegt Q_0 und ein Q_{123}.

I. und VIII. für P_0 und Q_0 gleich:
$(s-a)(s-b)(s-c)$.

II. und V. für P_1 und Q_1 gleich:
$s(s-b)(s-c)$.

III. und VI. für P_2 und Q_2 gleich:
$(s-a)\cdot s\cdot(s-c)$.

IV. und VII. für P_3 und Q_3 gleich:
$(s-a)(s-b)\cdot s$.

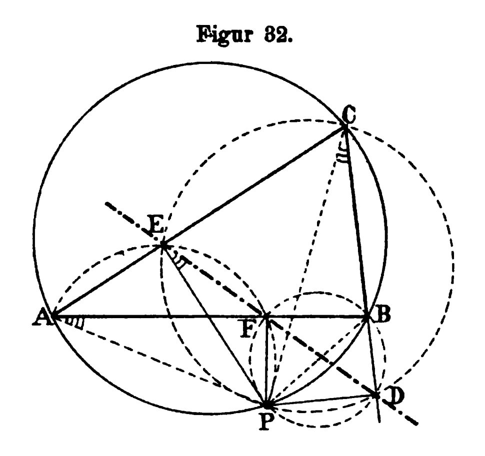
Von P_0 ausgehend gelangt man auf —·—· nach den Scheitelwinkeln zu den P_{123}, von je zwei solchen auf — — — nach den Aussenwinkeln zu einem Q_{123} und von diesen dreien auf ····· ins Innere zu Q_0 und umgekehrt.

Das der Figur 31 zu Grunde liegende Dreieck ist genau dasselbe, wie dasjenige in Figur 30, nur sind die dortigen Verbindungslinien weggelassen.

Erkl. 191. Es ist keine auffallende Erscheinung, dass für je zwei der Punkte P und Q dieselben Produktwerte erscheinen. Vielmehr ist dies nur ein besonderer Fall der in Aufgabe 146 dieses Teiles behandelten allgemeinen Erscheinung, dass sich stets zu einem Punkte innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ein zweiter finden lässt, welcher gleiches Produkt liefert. Auch lassen sich ja die vier vorhandenen Abschnittswerte s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ nicht anders als viermal zu je dreien gruppieren.

Frage 69. Welche Anwendung des Satzes von Menelaos liefert den Beweis für die „Simsonsche Gerade"?

Figur 32.



Erkl. 192. Dem Mathematiker Simson verdankt man die Aufstellung des Satzes:

Fällt man von einem beliebigen Punkte des Umkreises eines Dreiecks die Senkrechten auf die drei Seiten, so liegen deren Fusspunkte auf einer Geraden.

Und nach ihm ist daher auch diese Gerade mit dem Namen „Simsonsche Gerade" benannt.

Erkl. 193. Dass die drei Punkte DEF auf einer Geraden liegen, ist bereits früher bewiesen worden in Aufgabe 94 des IV. Teiles. Dort wurde mittels der Peripheriewinkel in den Halbkreisen über PA, PB, PC gezeigt, dass $\sphericalangle PEF = \sphericalangle PED$ sein muss, und daraus geschlossen, dass die Linien EF und ED zusammenfallen müssen.

Erkl. 194. Zum nebenstehenden Beweise kann man entweder die Strecken PA, PB, PC oder PD, PE, PF benützen. Daher sind im nebenstehenden beide Fälle angeschrieben, der letztere in Klammer.

Von den Punkten D, E, F sind fast immer zwei innere und ein äusserer. Ausser diesem Falle ist nur noch der eine möglich, dass alle

Antwort. Fällt man von einem Punkte P eines Kreises senkrechte Geraden auf die Seiten eines dem Kreise eingeschriebenen Dreiecks, so entstehen die Fusspunkte D, E, F auf den Seiten a, b, c. Nun bilden diese Senkrechten und die Verbindungslinien des Punktes P mit den Eckpunkten ABC rechtwinklige Dreiecke, deren andere Katheten die von den Punkten DEF gebildeten Seitenabschnitte sind. Ausser dem rechten Winkel besitzen nun je zwei dieser Dreiecke gleiche Winkel, nämlich die Peripheriewinkel im Umkreis des Dreiecks über den Sehnen PA, PB, PC. Es ist nämlich:

1) $\sphericalangle ACP = ABP$ oder $\sphericalangle ECP = FBP$,

folglich:

$$\triangle ECP \sim FBP.$$

2) $\sphericalangle BAP = BCP$ oder $\sphericalangle FAP = DCP$,

folglich:

$$\triangle FAP \sim DCP.$$

3) $\sphericalangle CBP = 180^0 - CAP$,

also:

$180^0 - CBP = CAP$ oder $\sphericalangle DBP = EAP$,

folglich:

$$\triangle DBP \sim EAP.$$

Aus diesen Aehnlichkeiten folgt die Proportionalität entsprechender Seiten, nämlich:

1) $EC : CP (: PE) = FB : BP (: PF)$,

2) $FA : AF (: PF) = DC : CP (: PD)$,

3) $DB : BP (: PD) = EA : AP (: PE)$.

Werden diese drei Proportionen multipliziert, so entstehen im zweiten Glied sowohl links wie rechts die gleichen Produkte $AP \cdot BP \cdot CP$ oder auch im dritten Glied die gleichen Produkte $PD \cdot PE \cdot PF$, folglich sind auch gleich-

drei Punkte äussere sind. Nach Satz 23 aber bleibt für diesen dieselbe Folgerung bestehen, wie hier. Genauere Betrachtung dieses Umstandes findet man in Aufgabe 151 am Schlusse dieses Teiles.

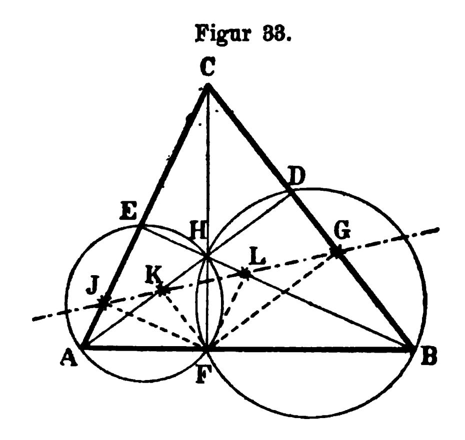
gross die Produkte der ersten Glieder, nämlich:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot CD \cdot EA.$$

Da nun D, E, F zwei innere und einen äusseren Teilpunkt bilden, so folgt aus dieser Gleichung, dass die Punkte DEF auf einer Geraden liegen.

Frage 70. Welche Folgerungen hat vorstehendes Ergebnis für die Senkrechten von einem Höhenfusspunkt auf die anderen Seiten und Höhen?

Figur 33.



Antwort. Fällt man vom Punkte F in Figur 33 die Senkrechten:

$$FG \perp a,\ FJ \perp b,\ FK \perp h_a,\ FL \perp h_b,$$

so wird F gleichzeitig Punkt des Umkreises für das Dreieck AEH und für BDH. Und für ersteres sind FJ, FK, FL die Senkrechten von F auf die drei Seiten, für letzteres ebenso FG, FL, FK. Folglich liegen auf einer Geraden die drei Punkte J, K, L einerseits und ebenfalls auf einer Geraden die Punkte G, L, K anderseits. Auf jeder dieser beiden Geraden müssen aber K und L liegen, folglich liegen alle vier Punkte G, J, K, L auf einer einzigen Geraden.

Erkl. 195. Man kann das nebenstehende Ergebnis in folgenden Satz zusammenfassen:

Satz. Werden vom Fusspunkte einer Höhe des Dreiecks auf die andern Seiten und Höhen Senkrechte gefällt, so liegen die vier Fusspunkte dieser Senkrechten sämtlich auf einer einzigen Geraden.

Frage 71. Welche Anwendungen gestatten die Sätze 23 für Vierecke?

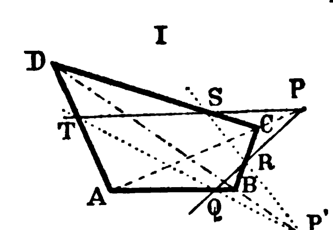
Erkl. 196. Das Wegfallen der auf der Diagonale gelegenen Strecken AP und PC wird dadurch veranlasst, dass, um die beiden Teildreiecke in gleicher Umlaufsrichtung zu erhalten, die Diagonale erst in der Richtung AC, dann in der entgegengesetzten Richtung CA durchlaufen wird. Dadurch erscheint AP bezw. AC das einemal als erster, das zweitemal als zweiter Abschnitt dieser Dreiecksseite, also einmal auf der linken, das anderemal auf der rechten Seite der Gleichung. Für das Viereck aber erscheinen dann sämtliche Seiten in gleicher Umlaufsrichtung.

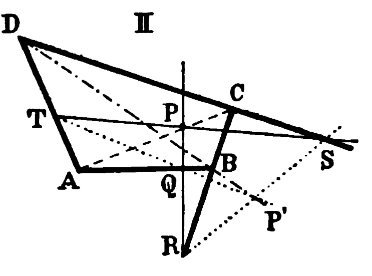
Antwort. Um die Sätze von Menelaos und Ceva auf Vierecke anzuwenden, zerlegt man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke ABC und ADC in Figur 34. Zieht man nun durch einen Punkt P dieser Diagonale zwei Transversalen, je eine durch jedes der beiden Dreiecke oder eine gemeinsame für beide, so erhält man für jedes Dreieck eine Gleichung als Ausdruck des Satzes von Menelaos.

Für ABC gilt wegen PQR:

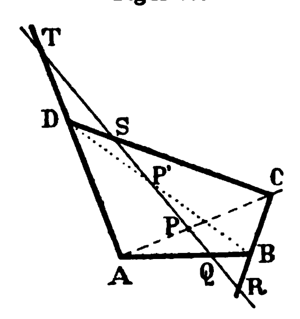
$$AQ \cdot BR \cdot CP = QB \cdot RC \cdot PA.$$

Figur 34.





Figur 35.



Erkl. 197. Die nebenstehende Beweisführung gilt ohne jegliche Abänderung für die beiden Fälle der Figur 34, sowie für Figur 35. Im ersteren sind zweierlei Transversalen, im letzteren eine einzige. Dann gilt dieselbe Gerade als PQR für ABC und als PST für ACD. Und der Satz bleibt ebenso in Gültigkeit.

Erkl. 198. Während die einzelne Transversale die Seiten des Vierecks aussen oder innen treffen kann, so kann auch der den beiden Transversalen gemeinsame Punkt P auf der Diagonale liegen, wo man ihn annehmen will — aussen (siehe Figur 34, I) oder innen (siehe Figur 34, II). Und man kann auch zu jedem Teildreieck zuordnen die eine oder andere Transversale, ohne dass die Gültigkeit des Satzes eine Aenderung erfährt.

Für ACD gilt wegen PST:

$$AP \cdot CS \cdot DT = PC \cdot SD \cdot TA.$$

Bei Multiplikation beider Gleichungen fällt das auf beiden Seiten vorkommende Produkt $AP \cdot PC$ der auf der Diagonale liegenden Strecken fort, und es bleibt:

$$AQ \cdot BR \cdot CS \cdot DT = QB \cdot RC \cdot SD \cdot TA.$$

Man erhält daher die Aussage:

Satz 28. Werden die vier Seiten eines Vierecks von einer Transversalen durchschnitten, oder werden je zwei der vier Seiten eines Vierecks von zwei Transversalen geschnitten, welche durch den gleichen Punkt der diese Seitenpaare trennenden Diagonale gehen, so sind die Produkte von je vier in gleicher Umlaufsrichtung nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten einander gleich.

Frage 72. Wie lässt sich der vorige Satz umkehren?

Erkl. 199. Die beiden Seiten, auf welchen die ersten Teilpunkte gewählt sind, bilden das eine Seitenpaar, die beiden anderen das andere; und das erste Seitenpaar wird vom zweiten Seitenpaar getrennt durch die Diagonale derjenigen Eckpunkte, in welchen je eine Seite des ersten Paares mit einer Seite des zweiten Paares zusammenstösst. Dabei kann das Viereck als solches auch ein überschlagenes sein: dann liegen zwar beide Seitenpaare auf derselben Seite der Diagonale, sind aber doch durch diese Diagonale je als zusammengehörig abgetrennt und die Sätze 28 und 28a behalten Gültigkeit.

Antwort. Als Umkehrung des vorigen Satzes kann man die Aussage machen:

Satz 28a. Liegen auf den vier Seiten eines Vierecks vier Teilpunkte so, dass die Produkte von je vier in gleicher Umlaufsrichtung nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten einander (auch dem Zeichen nach) gleich sind, so gehen jedesmal die beiden Verbindungstransversalen der Teilpunkte je zweier anstossenden Seiten durch den gleichen Punkt derjenigen Diagonalen, welche diese

beiden Seitenpaare trennt. [Die vier Teilpunkte können dabei auch auf einer Geraden liegen (Figur 35).] Zum Beweise nehme man etwa an, es sei in Figur 34:

$$AQ \cdot BR \cdot CS \cdot DT = QB \cdot RC \cdot SD \cdot TA.$$

Verbindet man nun QR, sucht den Schnittpunkt P mit der Diagonale AC und verbindet diesen mit S, so entsteht auf AD ein Schnittpunkt T', für welchen nach Satz 28 sein muss:

$$AQ \cdot BR \cdot CS \cdot DT' = QB \cdot RC \cdot SD \cdot T'A.$$

Demnach entsteht durch Division:

$$DT : DT' = TA : T'A,$$

oder:

$$DT : TA = DT' : T'A.$$

Da nun angenommen ist, dass die Produkte der Strecken auch dem Vorzeichen nach gleich sein sollen, so können T und T' keine verschiedenen Punkte sein, sondern wenn T innerer, muss auch T' innerer Punkt sein und umgekehrt; also fallen T und T' als gleichartige Teilpunkte mit gleichem Teilungsverhältnis zusammen, und damit ist die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

Erkl. 200. Um die Gleichheit der Produkte auch dem Zeichen nach festzustellen, hat man wie früher als positiv zu rechnen die Abschnitte vom Eckpunkt in der Richtung nach dem Innern der Seite, als negativ die Abschnitte in der Richtung nach dem Aeussern der Seite. Sind also von den Teilpunkten des ersten Seitenpaares:

1) beide innere oder beide äussere, oder

2) einer ein innerer, der andere ein äusserer,

so müssen auch von den Teilpunkten des andern Seitenpaares im ersten Falle beide innere oder beide äussere, im zweiten Falle wieder einer ein innerer, der andere ein äusserer sein.

Erkl. 201. Der nebenstehende Beweis ist als indirekter geführt. Aus demselben geht deutlich hervor, dass die Annahme des gleichen Vorzeichens bei beiden Produkten nötig ist; denn wäre dies nicht der Fall, so könnte Punkt T ein innerer, T' aber ein äusserer sein oder umgekehrt, es wäre dann:

$$DT : TA = DT' : T'A,$$

aber nicht die Transversalen QR und ST, sondern bloss QR und ST', würden durch denselben Punkt der Diagonale AC gehen.

Frage 73. Welche Folgerung ergibt sich aus Satz 28a für Figur 34?

Antwort. Wendet man auf Figur 34, I den Satz 28a in der Weise an, dass man nicht (wie in Antwort der Frage 71) die Seiten AB, BC und CD, DA als die beiden Seitenpaare annimmt, sondern AB mit AD und BC mit CD zusammennimmt, so besagt Satz 28a, dass die Verbindungslinien der Teilpunkte Q und T, sowie R und S sich in einem Punkte P' der Diagonalen BD treffen müssen.

Nimmt man ebenso in Figur 34, II nicht AB, BC und AD, DC zusammen, sondern AB, AD und BC, BD, so müssen nach Satz 28a die Verbindungslinien der Teilpunkte Q und T durch denselben Punkt der Diagonalen BD gehen, wie diejenigen der Teilpunkte R und S.

Man erhält also:

Satz 28b. Gehen von einem Punkte der einen Diagonale eines Vierecks

Erkl. 202. Der nebenstehende Satz ist gewissermassen die Erläuterung des Wortes „jedesmal“ im vorigen Satze 28a. Denn man kann auf zweierlei Weise die vier Vierecksseiten zu zwei anstossenden Paaren zusammenfassen: Ist nur die Lage der Punkte gegeben, so hat man zweierlei Wahl der Zusammenfassung (und dies liegt in Satz 28a); ist aber die eine Diagonale und damit die eine Art der Zusammenfassung gewählt, so folgt erstens die Produktengleichheit der Seitenabschnitte (Satz 28) und zweitens die Möglichkeit der zweiten Art der Zusammenfassung (Satz 28b).

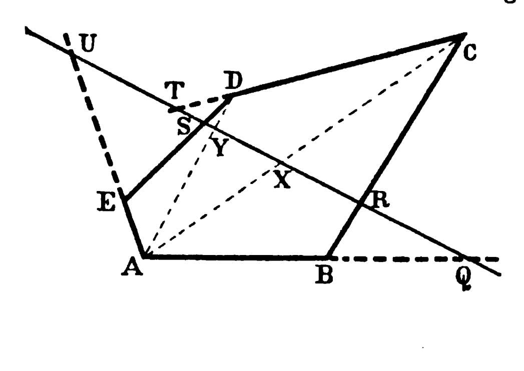
Erkl. 203. In Figur 34, I war P ein äusserer Diagonalenpunkt, der Punkt P' ebenfalls. In Figur 34, II ist P ein innerer, P' wieder ein äusserer Punkt. Denn die Seiten a, b, c, d, werden in Figur 36, I sämtlich innen geteilt, und dabei können die Schnittpunkte P und P' nur aussen liegen. In Figur 34, II dagegen werden nur a und d innen geteilt, b und c aussen; dabei kann P innen liegen, P' aber muss wieder ausserhalb sein.

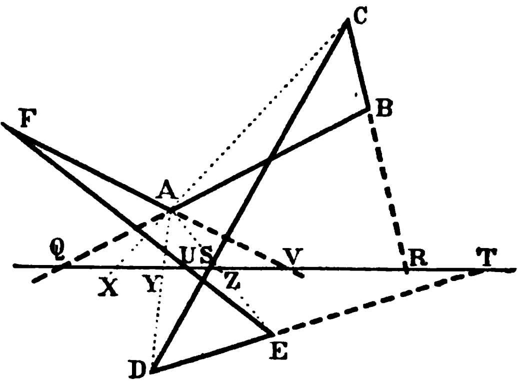
Erkl. 204. In Figur 35 wird Satz 28b von selbst erfüllt, da einerseits die Linien QR

und ST, anderseits aber auch QT und RS in die einzige Transversale zusammenfallen. Daher liegt P' im Schnittpunkt dieser selben Transversale mit Diagonale BD. Eine kleine Abänderung dieser Figur, in der Art, dass etwa die dortige Transversale PST belassen, aber statt ihrer Verlängerung PQR eine um einen kleinen Winkel (mit der Uhr) gedrehte zweite Transversale PQR gewählt würde, liefert einen solchen Fall der Figur, wo sowohl P (an seiner alten Stelle) als P' (um ein weniges gegen D hin verschoben) innere Punkte ihrer Diagonalen werden. Es können also von den Punkten P und P' beide innen, oder beide aussen, oder einer innen, einer aussen liegen.

zwei Transversalen durch die von dieser ersten Diagonalen getrennten Seitenpaare, so gehen die Verbindungslinien der so entstehenden Teilpunkte auf den durch die andere Diagonale getrennten Seitenpaaren durch denselben Punkt dieser zweiten Diagonale.

Figur 36.





Frage 74. Welche Verallgemeinerung für das allgemeine Vieleck lässt Satz 28 zu?

Antwort. Wird ein beliebiges Vieleck von einer Transversalen geschnitten, so kann man dasselbe durch Diagonalen von einem gemeinsamen Eckpunkte aus so in Teildreiecke zerlegen, dass bei Umlaufung dieser sämtlichen Teildreiecke in passend gewählter Umdrehungsrichtung jede der Diagonalen der Reihe nach in zwei entgegengesetzten Richtungen und doch die Vielecksseiten sämtlich in fortlaufender Richtung durchlaufen werden. Setzt man also in jedem dieser Teildreiecke für die gegebene Transversale die Gleichung des Satzes von Menelaos in der zu wählenden Umlaufsrichtung an, so erscheinen, wie in Antwort der Frage 71, die auf den Diagonalen gelegenen Streckenabschnitte auf den entgegengesetzten Seiten der Gleichung, so dass dieselben sich bei

Erkl. 205. In Figur 36 sind an zwei Figuren die nebenstehenden Untersuchungen veranschaulicht: Figur 36, I gibt ein einfaches Fünfeck, in welchem auch die Diagonalen möglichst einfache Lage erhalten, und sämtliche Teildreiecke in derselben (nämlich der positiven) Drehungsrichtung umlaufen werden. Figur 36, II dagegen zeigt die Gültigkeit des Satzes für ganz beliebige, sogar überschlagene Vielecke: Das Sechseck $ABCDEF$ liefert die von A ausgehenden Diagonalen zum Teil ganz ausserhalb der Figur selbst, und die Teildreiecke werden in verschiedener Drehungsrichtung umlaufen: ABC, ADE in positiver, ACD und ACF in negativer Richtung: aber die Seiten $ABCDEFA$ bleiben in fortlaufender Richtung durchlaufen.

Multiplikation wegheben lassen. So entsteht für das Fünfeck $ABCDE$ in Figur 36, I folgende Gruppe von Gleichungen:

Für $\triangle ABCA$ gilt:

$$AQ\cdot BR\cdot CX = QB\cdot RC\cdot XA.$$

Für $\triangle ACDA$ gilt:

$$AX\cdot CS\cdot DY = XC\cdot SD\cdot YA.$$

Für $\triangle ADEA$ gilt:

$$AY\cdot DT\cdot EU = YD\cdot TE\cdot UA.$$

Also durch Multiplikation:

$$AQ\cdot BR\cdot CS\cdot DT\cdot EU = QB\cdot RC\cdot SD\cdot TE\cdot UA.$$

Daher erhält man die Aussage:

Satz 29. Wird ein beliebiges Vieleck von n Seiten durch eine Transversale geschnitten, so sind die Produkte von je n in gleicher Umlaufsrichtung nicht aneinanderstossenden Seitenabschnitten einander gleich.

Erkl. 206. Die Gleichungen für die Teildreiecke des Sechsecks $ABCDEF$ in Figur 36, II sind fast buchstäblich dieselben, wie die nebenstehenden für das Fünfeck. Nur an die Stelle der letzten tritt ein Paar von Gleichungen. Man hat nämlich:

Für $\triangle ABCA$ gilt:

$$AQ\cdot BR\cdot CX = QB\cdot RC\cdot XA,$$

für $\triangle ACDA$ gilt:

$$AX\cdot CS\cdot DY = XC\cdot SD\cdot YA,$$

für $\triangle ADEA$ gilt:

$$AY\cdot DT\cdot EZ = YD\cdot TE\cdot ZA,$$

für $\triangle AEFA$ gilt:

$$AZ\cdot EU\cdot FV = ZE\cdot UF\cdot VA,$$

also durch Multiplikation und Wegfall aller Diagonalstrecken AX, XC, AY, YD, AZ, ZE:

$$AQ\cdot BR\cdot CS\cdot DT\cdot EU\cdot FV = QB\cdot RC\cdot SD\cdot TE\cdot UF\cdot VA.$$

---

8) Ueber die sog. „Aehnlichkeitsmethode" zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

Frage 75. Was versteht man unter der Aehnlichkeitsmethode zur Auflösung geometrischer Aufgaben?

Antwort. Unter Aehnlichkeitsmethode versteht man diejenige Art von Auflösung einer geometrischen Aufgabe, bei welcher nicht die in der Aufgabe selbst verlangte Figur als nächstes Ziel gilt, sondern wobei man zuerst eine dieser verlangten Figur ähnliche Figur sucht, um dann erst durch ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung dieser ersten Figur die endgültige zu erhalten (vergleiche Erkl. 103).

Erkl. 207. Wenn eine der verlangten Figur ähnliche zunächst gesucht wird, so heisst dies, dass die Streckengrössen zunächst ausser Betracht bleiben, und nur die Winkelgrössen der vorläufigen Untersuchung bezw. Festlegung unterliegen sollen. Mit Festlegung der Winkelgrössen sind dann zwar nicht die Streckengrössen, wohl aber deren Verhältnisse bestimmt, also kann man dann ohne weitere Rücksicht auf die Winkelgrössen nachträglich erst die verlangte Grösse der Strecken herstellen.

Frage 76. Wann kann man eine der verlangten Figur ähnliche Figur erhalten?

Antwort. Wenn alle zu einer Aufgabe gehörigen Bestimmungsstücke gegeben sind, so ist die verlangte Figur vollständig bestimmt; wird ein einzelnes der Bestimmungsstücke weggelassen und eine Figur gesucht, welche den noch übrigen Bestimmungsstücken (mit Ausnahme des weggelassenen) genügt, so ist dies keine vollständig bestimmte Aufgabe, sondern es

Erkl. 208. Wie in Antwort der Frage 124 des III. Teiles ausgeführt wird, kann eine Aufgabe überbestimmt sein (wenn nämlich mehr Vorschriften gegeben sind, als die Anzahl der willkürlichen Stücke der verlangten Figur zulässt), oder gerade bestimmt, oder unbestimmt (wenn die Anzahl der willkürlichen Stücke der gesuchten Figur gleich oder grösser ist, als die der gegebenen).

muss vielerlei Figuren dieser Art geben, und dieselben unterscheiden sich voneinander durch die verschiedene Grösse des letzten Stückes.

Wenn nun diese vielen Figuren, welche der Aufgabe in allen Stücken bis auf das eine genügen, alle einander und der gesuchten ähnlich sind, dann ist die Anwendung der Aehnlichkeitsmethode möglich, weil durch Zeichnung einer einzigen dieser Figuren eine der verlangten Figur ähnliche erhalten wird.

Erkl. 209. Eine unbestimmte oder nur unvollständig bestimmte Aufgabe ist keineswegs eine unmögliche. Vielmehr hat eine solche stets vielerlei Lösungen; denn für die nicht vorgeschriebene Grösse irgend welcher Bestimmungsstücke kann dann eine willkürlich gewählte Grösse derselben eintreten, oder eine sich bei beliebiger Konstruktion mit den übrigen Stücken zufällig ergebende Grösse.

Frage 77. Von welcher Art müssen daher die Aufgaben sein, auf welche die Aehnlichkeitsmethode angewandt werden kann?

Antwort. 1) Damit eine Aufgabe mittels der Aehnlichkeitsmethede gelöst werden kann, muss dieselbe nach voriger Antwort so beschaffen sein, dass bei Weglassung eines einzelnen der gegebenen Bestimmungsstücke alle die Figuren, welche den übrigen Bestimmungsstücken genügen, einander und der gesuchten ähnlich sind. Damit dies aber möglich wird, muss nach Satz 16:

a) das einzelne zunächst ausser Betracht gelassene Bestimmungsstück nicht eine Winkelgrösse, sondern eine Streckengrösse sein, und

b) müssen die sämtlichen übrigen gegebenen Stücke nur aus Streckenverhältnissen und Winkelgrössen sich zusammensetzen und zwar beiderlei Grössen je in solcher Anzahl zusammengestellt, welche nach Satz 16 zur Aehnlichkeit allgemeiner Vielecke erforderlich sind.

2) Die einzige Streckengrösse kann dabei entweder eine wirkliche Strecke der verlangten Figur sein von irgend welcher Art (eine Seite, eine Transversale, ein Abschnitt u. s. w.) oder auch irgend eine Verbindung zwischen zwei oder mehr Strecken der Figur selbst, z. B. eine Summe, Differenz, wohl auch ein Produkt von Strecken der gesuchten Figur. Denn sind $a'b'c' \cdots$ Stücke der vorläufig konstruierten

Erkl. 210. Dass der Satz 16, welcher die Aehnlichkeitsbedingungen allgemeiner Vielecke festsetzt, hier wirklich in Geltung zu treten hat, geht daraus hervor, dass jede Aufgabe aufgefasst werden kann als Aufsuchung irgend eines Vielecks besonderer Art, auch wenn nicht gerade ein solches als eigentliches Ziel der Aufgabe ausdrücklich genannt ist. Denn z. B. eine bestimmte Linie in ein Dreieck (oder ein Viereck) einzutragen, heisst mit anderen Worten ein Viereck (oder ein Fünfeck) besonderer Art herstellen, und ebenso in anderen Fällen.

Erkl. 211. Nun können aber nach Satz 16 sowohl, als nach Antwort der Frage 39 Vielecke nur ähnlich sein, wenn sie lauter entsprechend gleiche Winkel haben; folglich können auch die mittels der „übrigen Bestimmungsstücke“ konstruierten Figuren unter einander und der gesuchten nur dann ähnlich sein, wenn alle ihre entsprechenden Winkel unter einander und in der gesuchten Figur gleich sind. Demnach darf die Angabe einer Winkelgrösse nicht als das vorerst weggelassene Bestimmungsstück gewählt werden, sondern diese einzelne Grösse muss eine Streckengrösse sein.

Erkl. 212. Aber diese einzelne Grösse muss auch die einzige Streckengrösse unter allen Bestimmungsstücken sein, da sonst wieder nach Satz 16 keine Aehnlichkeit möglich wäre. Denn nur Gleichheit von Streckenverhältnissen ermöglicht die Aehnlichkeit, Gleichheit von Streckengrössen würde Kongruenz zur Folge haben, also wieder die Willkürlichkeit dieser vorläufigen Konstruktion aufheben.

Figur und abc die entsprechenden der endgültig verlangten, so muss ja:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \cdots = x$$

sein, oder:

$$a = x \cdot a', \quad b = x \cdot b', \quad c = x \cdot c' \cdots$$

Ist also vorgeschrieben etwa:

$$a + b - c = l,$$

nämlich eine beliebig gegebene Länge l, so bildet man an der vorläufigen Figur:

$$a' + b' - c' = l'.$$

Da dann:

$$a + b - c = xa' + xb' - x \cdot c',$$

so ist auch:

$$l = x \cdot l'.$$

Wäre etwa gegeben $a \cdot b = F$, nämlich gleich einer gegebenen Fläche F, so würde wieder:

$$a \cdot b = x \cdot a' \cdot x \cdot b' = x^2 \cdot a'b' = F.$$

Bildet man also an der vorläufigen Figur die Grösse $a'b'$, so wird:

$$x^2 = \frac{F}{a'b'},$$

also x die Quadratwurzel dieses Ausdruckes.

Erkl. 213. Der Begriff „Streckengrösse" ist im vorliegenden Falle etwas verallgemeinert aufgefasst, da nicht nur eine Strecke selbst, sondern auch Verbindungen solcher Strecken von höherer als erster Dimension auftreten können. Allerdings beschränkt sich die Möglichkeit, die Verhältnisgrösse x geometrisch zu finden, auf die erste und zweite Dimension. Aber mittels algebraischer Geometrie könnte man auch den Fall zur Lösung führen, dass etwa gegeben wäre ein Produkt $a \cdot b \cdot c = K$ (d. h. gleich einer gegebenen körperlichen Grösse), wie es etwa bei Anwendung der Sätze von Menelaos und Ceva eintreten könnte. Dann wäre eben zu setzen:

$$a \cdot b \cdot c = x \cdot a' \cdot x \cdot b' \cdot x \cdot c' = x^3 \cdot a'b'c',$$

also:

$$x = \sqrt[3]{\frac{K}{a'b'c'}}.$$

Erkl. 214. Die Grösse x wäre dann in allen diesen Fällen die Verhältniszahl zwischen irgend einer Strecke der gesuchten und der vorläufigen Figur, also nach Erkl. 103 der Massstab der Verjüngung bezw. der Vergrösserung, nach welchem aus der vorläufigen Figur die gesuchte hervorgeht.

3) Unter den übrigen Bestimmungsstücken (ausser dieser Streckengrösse) dürfen nach obigem Seitenverhältnisse und Winkelgrössen auch nicht in ganz beliebiger Anzahl auftreten, sondern nur so, dass die Bedingungen der Aehnlichkeit nach Satz 16 erfüllt bleiben. Wenn es nämlich im ganzen $2n - 3$ willkürliche Stücke sind, so müssen davon $n - 2$ bis n Seitenverhältnisse und dazu $n - 1$ bis $n - 3$ Winkelgrössen sein, bezw. von im ganzen m willkürlichen Stücken müssen:

$$\frac{1}{2}m - \frac{1}{2} \text{ bis } \frac{1}{2}m + 1\frac{1}{2}$$

Seitenverhältnisse und dazu:

$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \text{ bis } \frac{1}{2}m - 1\frac{1}{2}$$

Winkelgrössen sein, jedesmal in bestimmter Beziehung der gegenseitigen Anordnung zwischen den Seiten und deren eingeschlossenen Winkeln. Dazu kommt dann als letzte die einzige Streckengrösse selbst.

Erkl. 215. Setzt man $2n - 3 = m$, so wird:

$$n = \frac{1}{2}(m + 3),$$

also:

$$n - 1 = \frac{1}{2}(m + 1), \quad n - 2 = \frac{1}{2}(m - 1),$$

$$n - 3 = \frac{1}{2}(m - 3).$$

Dabei entstehen ganze Zahlen, wenn m ungerad; im andern Falle hat man die nächst niedere ganze Zahl zu setzen.

Frage 78. Welche besondere Art von Aufgaben ist ebenfalls zur Anwendung der Aehnlichkeitsmethode geeignet?

Erkl. 216. Soll z. B. in oder um ein gegebenes n-Eck ein m-Eck beschrieben werden, so kann man dies im ganzen so ansehen, als sei ein $(m+n)$-Eck verlangt, wovon n Seiten nach der Lage und Grösse der Winkel gegeben sind, und die Lage der noch übrigen m Seiten zu suchen sei. Verändert man dann das gegebene n-Eck sich selbst ähnlich so, dass ein vorläufig gewähltes m-Eck in verlangter Beziehung möglich wird, so hat man eine der gesuchten Figur ähnliche gefunden.

Antwort. Es ist eine besondere Art der im vorigen beschriebenen Gattung von Aufgaben, dass für eine verlangte Figur bestimmt wird, dass gewisse Punkte derselben auf gegebenen geraden Linien liegen sollen. Denn die gegebene Lage dieser letzteren Linien zu einander bildet nur eine etwas andere Form der Bestimmung von Winkelgrössen oder Seitenverhältnissen, und dadurch ordnet sich diese Art Aufgaben als besonderer Fall unter den vorigen allgemeinen ein.

Frage 79. Wie verfährt man, um aus der vorläufig gefundenen Figur, welche der verlangten ähnlich ist, die endgültige Figur zu finden?

Erkl. 217. Die erste Methode nebenstehender Antwort wird die bequemste, wenn das Zahlenverhältnis zwischen der zufällig gefundenen vorläufigen Figur und der endgültigen ein besonders einfaches wird, z. B. wie 1 : 2 oder 2 : 1; 3 : 1 oder 1 : 3 u. s. w. Auch wird diese Methode notwendig dann anzuwenden sein, wenn die gegebene Streckengrösse von mehr als zweiter Dimension ist, wo die geometrische Konstruktion unmöglich würde (siehe Erkl. 213).

Erkl. 218. Die zweite Methode nebenstehender Antwort findet Anwendung, wenn die gegebene Streckengrösse von erster oder zweiter Dimension ist. Denn man kann stets zwei solche Strecken konstruieren, die sich verhalten wie zwei gegebene Flächen. Dann gestaltet sich die Konstruktion am einfachsten, indem man aus jenen beiden ersten Strecken (den Vordergliedern der Proportion) mit beliebigem eingeschlossenem Winkel ein Dreieck herstellt, und auf dem ersten Schenkel desselben die Strecken der vorläufigen Figur anträgt. Zieht man dann Parallelen zu der dritten Seite dieses Dreiecks, so entstehen auf dem andern Schenkel die entsprechenden Strecken für die endgültige Figur.

Erkl. 219. Die dritte Methode nebenstehender Antwort findet besonders Anwendung bei der in voriger Antwort 78 und Erkl. 216 erwähnten Art von Aufgaben. Dabei muss allerdings die gegebene Streckengrösse eine wirkliche Längengrösse sein. Ist dann diese mit ihrer entsprechenden in parallele Lage gebracht, so befinden sich die vorläufige und die endgültige Figur in der in Antwort der Frage 41

Antwort. Um aus der vorläufig gefundenen Figur die ihr ähnliche endgültige Figur herzustellen, kann man auf verschiedene Weise verfahren. In jedem Falle fasst man zunächst diejenige Grösse ins Auge, welche an der vorläufigen Figur der vorbezeichneten einzelnen Streckengrösse zukommt.

1) Dann kann man durch Messung und Rechnung die Verhältniszahl x bestimmen, welche den Massstab der Verkleinerung oder Vergrösserung zwischen beiden Figuren angibt, und zeichnet dann die Figur von neuem, nachdem man jede Strecke derselben mit x multipliziert hat.

2) Oder man konstruiert zu jeder Strecke der vorläufigen Figur die entsprechende der endgültigen Figur als vierte Proportionale in einer Proportion, in welcher die beiden Vorderglieder gebildet sind durch die an der vorläufigen Figur auftretende Grösse der gegebenen Streckengrösse und die letztere selbst, und konstruiert dann mit den so erhaltenen Strecken und den bereits vorhandenen Winkeln die endgültige Figur.

3) Oder man bringt die gegebene Streckengrösse in parallele Lage zu ihrer entsprechenden an der vorläufigen Figur auftretenden Grösse, sucht den Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Strecken

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist **aufgeschnitten** und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). **Jedes Kapitel** enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und **Erklärungen** am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

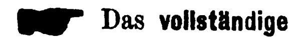
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis
der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1337. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil. Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren. Forts. v. Heft 1336. — Seite 81—96. Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1336. — Seite 81—96. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl der Hefte** erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch** alle **Teile** der **reinen und angewandten** Mathematik — **nach** besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben **beigegeben**, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen** Verwertungen und **weiteren Forschungen** geben.

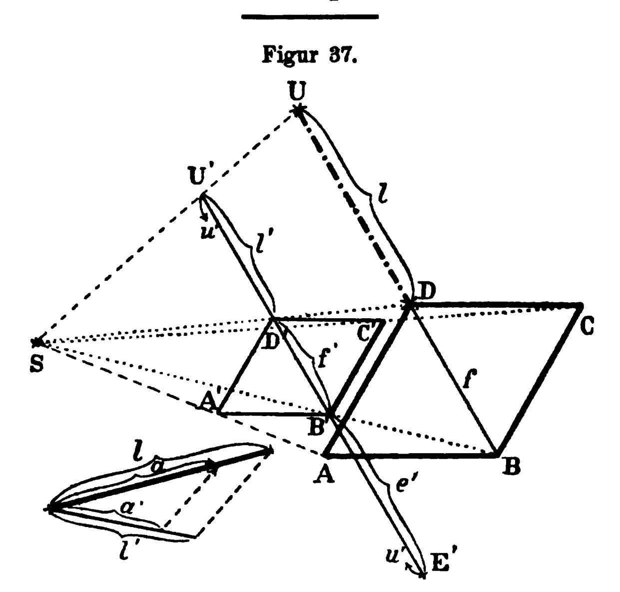
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige **und praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und **mit Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der** Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren** Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

besprochenen perspektivischen Lage, und man erhält nach eben jener Antwort leicht sämtliche Punkte der gesuchten Figur.

auf und vervollständigt darnach die endgültige Figur durch Ausziehen von Parallelen zu den Strecken der vorläufigen Figur, je bis zum Schnitt mit dem Aehnlichkeitsstrahl zweier entsprechenden Punkte.

Figur 37.



Frage 80. Wie konstruiert man mittels der Aehnlichkeitsmethode ein Rhombus mit vorgeschriebenem Winkel von 60^0, bei welchem die Differenz aus Diagonalensumme und Seitensumme gleich einer bestimmten Länge l ist?

Erkl. 220. In Figur 37 ist:

$$B'D' = f', \quad B'E' = e' = A'C',$$

also:

$$D'E' = e' + f'.$$

Ferner ist:

$$E'U' = 4 \cdot a' = u',$$

also:

$$u' - (e' + f') = E'U' - E'D' = D'U' = l'.$$

Erkl. 221. Die Verhältniszahl $\varkappa$ ist in Figur 37 fast genau $1\frac{1}{2}$ geworden, man kann also das Rhombus $ABCD$ konstruieren, wenn man als Seite die um ihre Hälfte vermehrte Seite $A'B'$ nimmt.

Die zweite Methode ist durch die kleine Nebenfigur bei Figur 37 angedeutet.

Antwort. Man konstruiere ein beliebiges Rhombus mit einem Winkel von 60^0, trage die eine Diagonale als Verlängerung der andern an, ziehe die Summe vom Umfang ab und vergleiche diese Strecke l' mit l. Nun kann man nach obigen drei Methoden verfahren:

1) Ist $\frac{l}{l'} = \varkappa$, so muss auch $\frac{a}{a'} = \varkappa$ sein oder $a = \varkappa \cdot a'$, und damit ist die Seite a des zu zeichnenden Rhombus gefunden. Denn wegen der Aehnlichkeit muss:

$$a : a' = u : u' = e : e' = f : f'$$
$$= (e + f - u) : (e' + f' - u') = l : l'.$$

Ist also $l = \varkappa \cdot l'$, so ist auch:

$$u = \varkappa \cdot u', \; e = \varkappa \cdot e', \; f = \varkappa \cdot f' \text{ und } a = \varkappa \cdot a'.$$

2) Nach der zweiten Methode bilde man ein Dreieck mit beliebigem Winkel, eingeschlossen von den Seiten l' und l, trage auf dem Schenkel l' die willkür-

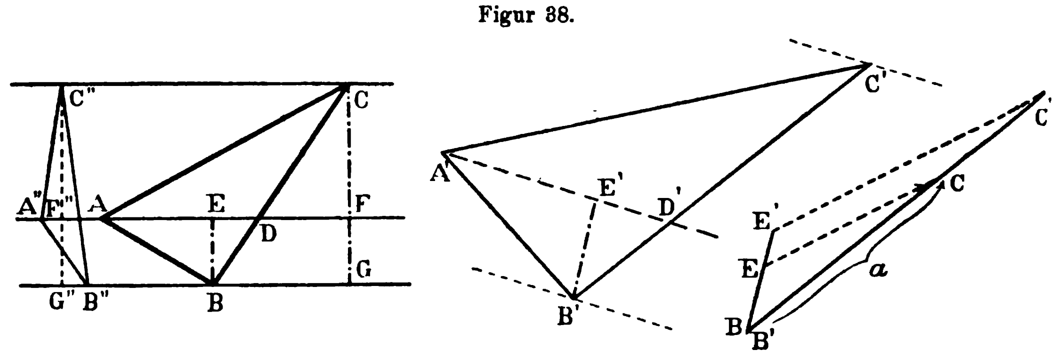
lich gewählte Strecke a' ab und ziehe durch den Endpunkt die Parallele zur dritten Seite. Der auf dieser entstehende Abschnitt ist die gesuchte Seite a des verlangten Rhombus.

3) Nach der dritten Methode legt man irgendwo $l \parallel l'$ an, verbindet die Endpunkte und zieht durch deren Schnittpunkt S die Aehnlichkeitsstrahlen nach den Punkten der vorläufigen Figur. Dann entsteht die endgültige Figur durch die Parallelen zu den Seiten a'.

Erkl. 222. Die dritte Methode ist die in Figur 87 ausführlich dargestellte: $DU \parallel D'U'$ liefert den Aehnlichkeitspunkt S als Schnittpunkt der Geraden DD' und UU'. Zieht man dann noch SA', SB', SC', so liegen auf diesen Strahlen die Punkte ABC, und zwar werden dieselben ausgeschnitten durch die Parallelen:

$$DA \parallel D'A'; \quad DC \parallel DC'; \quad AB \parallel A'B' \parallel DC, \quad CB \parallel C'B' \parallel DA.$$

Figur 88.



Frage 81. Wie konstruiert man mittels der Aehnlichkeitsmethode ein Dreieck von gegebenen Winkeln, dessen Ecken in bestimmter Folge auf den gegebenen Parallelen liegen müssen?

Antwort. Um die in nebenstehender Frage enthaltene Aufgabe zu lösen, kann man folgendermassen verfahren:

Analysis. Denkt man sich die Aufgabe gelöst und nimmt an, ein beliebiges Dreieck $A''B''C''$, dessen Ecken in der verlangten Folge auf den drei Parallelen liegen, sei das verlangte, so erkennt man durch Zeichnung einer Senkrechten durch die Parallelen, dass jede Seite des Dreiecks durch die Parallelen ebenso geteilt wird, wie diese Senkrechte, und zwar dass insbesondere diejenige Seite innen geteilt wird, welche gegenüberliegt dem Eckpunkt auf der mittleren Parallelen. Dadurch erhält man für ein dem verlangten ähnliches Dreieck die Richtung, in welcher die drei Parallelen zum Dreieck liegen müssen.

Erkl. 223. Dass die Ecken in bestimmter Folge auf den Parallelen liegen müssen, bildet eine Einschränkung der Aufgabe, welche sonst viel allgemeiner bliebe. Denn man könnte für jeden der drei Eckpunkte (und diese sind durch den zugehörigen Winkel bestimmt) jede der drei Parallelen als Träger bestimmen, also im ganzen sechs verschiedene Lagen des Dreiecks ABC auf den drei Parallelen.

Ausführung. Man zeichnet ein beliebiges Dreieck $A'B'C'$ mit den verlangten Winkelgrössen, teilt die Gegen-

Erkl. 224. Die Seite BC in Figur 88 ist innen geteilt im Verhältnis:

$$BD:DC = GF:FC.$$

Verlängert man AC zum Schnitt mit der untern Parallelen, so erhält man einen Schnittpunkt K, für welchen:

$$KA:AC = GF:FC,$$

oder:

$$KA:KC = GF:GC.$$

Und ebenso liefert der Schnittpunkt H der Seite AB mit der obern Parallelen die Proportionen:

$$BA:AH = GF:FC,$$

oder:

$$HA:HB = CF:CG.$$

Man kann daher die Konstruktion der Parallelen zum vorläufigen Dreieck $A'B'C'$ dadurch finden, dass man entweder, wie nebenstehend, $B'C'$ innen teilt, wie:

$$B'D':D'C' = GF:FC,$$

oder $A'B'$ aussen teilt, wie:

$$H'A':H'B' = CF:CG,$$

oder endlich, dass man $A'C'$ aussen teilt, wie:

$$K'A':K'C' = GF:GC.$$

Erkl. 225. Würde man $B'C'$ im entgegengesetzten Verhältnis teilen, nämlich wie:

$$B'D':D'C' = CF:FG,$$

so würde auch der Winkel von C und B vertauscht und Punkt B käme auf die obere, C auf die untere Parallele. Denselben Erfolg liefert Teilung von c' wie:

$$H'A':H'B' = GF:GC,$$

oder von b' wie:

$$K'A':K'C' = CF:CG.$$

Erkl. 226. Die Determination der nebenstehenden Aufgabe wäre folgende: Jede Lage des gefundenen Dreiecks ABC kann auch um eine Senkrechte CFG umgeklappt werden, ohne dass die Anordnung der Eckpunkte auf den Parallelen sich verändert. Aber die Umlaufsrichtung des Dreiecks wird dadurch die umgekehrte: vorher ABC positiv, nachher ABC negativ. Rechnet man vorstehende Unterscheidung als zweierlei Lösung, dagegen alle gleichwendig kongruenten (durch Parallelverschiebung entstehenden) als einzige, so gilt dasselbe für jeden der sechs Fälle von verschiedener Anordnung der Eckpunkte auf den drei Parallelen (Erkl. 223), so dass man für die allgemein gestellte Aufgabe zwölf verschiedene Lösungen hat. Und alle zwölf Lösungen sind stets ausführbar.

seite von A innen im Verhältnis der Breiten der beiderseitigen Parallelstreifen, also:

$$B'D':D'C' = G''F'':F''C'',$$

zieht durch den entstehenden Teilpunkt D' die Verbindungslinie $A'D'$ und fällt darauf die Senkrechte $B'E'$. Nun muss:

$$a:a' = BE:B'E' = \varkappa,$$

so dass wieder zu finden $a = \varkappa \cdot a'$, oder a als vierte Proportionale zu $B'E'$, a', BE; und hiernach hat man c zu konstruieren und die Schnittpunkte A und C einzutragen und zu verbinden.

Beweis. Dass die drei Eckpunkte, wie verlangt, auf den Parallelen liegen, ergibt die Konstruktion. Demnach bleibt nachzuweisen, dass das Dreieck ABC die Winkel mit $A'B'C'$ gemein hat. Zu diesem Behufe zieht man noch in beiden Figuren die Senkrechte CFG bezw. $C'F'G'$. Dann weiss man, dass nach Konstruktion:

$$B'D':D'C' = G''F'':F''C'',$$

und dass:

$$BC:B'C' = BE:B'E' = BA:B'A' = \varkappa.$$

Nun folgt aus letzterem, dass:

$$BC:BA = B'C':B'A'.$$

Man braucht also für die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nur noch die Gleichheit der eingeschlossenen Winkel ABC und $A'B'C'$ nachzuweisen. Diese Winkel aber setzen sich zusammen aus den beiden Teilen ABE und DBE. In den Dreiecken ABE ist nun wieder:

$$AB:BE = A'B':B'E'$$

und je ein rechter Winkel, also ist:

$$\triangle ABE \sim A'B'E'$$

und

$$\sphericalangle ABE = A'B'E'.$$

Für Dreieck BED sodann ist nach der Figur:

$$BD:BC = GF:GC,$$

und nach Voraussetzung auch:

$$B'D':B'C' = GF:GC,$$

also:

$$BD:BC = B'D':B'C',$$

und durch Umstellung auch:

$$BD:B'D' = BC:B'C' = \varkappa;$$

demnach hat Dreieck BED den rechten Winkel und die Proportion:

$$BE:B'E' = BD:B'D'.$$

Daher ist auch:

$$\triangle BDE \sim B'D'E'$$

und

$$\sphericalangle EBD = E'B'D'.$$

Folglich ist auch:

$$\sphericalangle ABE + DBE = ABC$$
$$= \sphericalangle A'B'E' + D'B'E' = A'B'C',$$

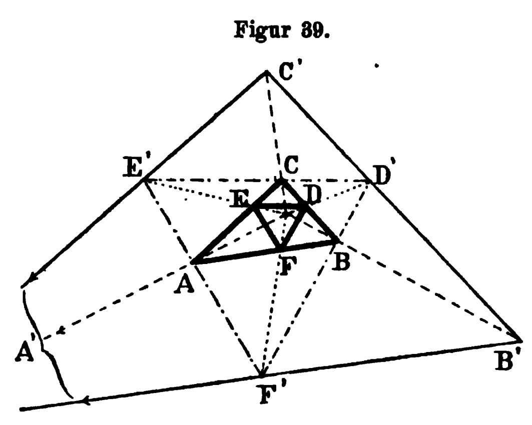
also:

$$\triangle ABC \sim A'B'C'.$$

Demnach hat ABC die vorgeschriebenen Winkel des Dreiecks $A'B'C'$, und seine Eckpunkte liegen auf den Parallelen.

Frage 82. Wie wird in ein beliebiges Dreieck ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben, dessen Ecken auf den Seiten des ersten liegen, und dessen Seitenrichtungen gegeben sind?

Figur 39.



Erkl. 227. Vorstehende Aufgabe ist insbesondere vorbildlich für alle solche Aufgaben, welche die Zeichnung einer Figur in (oder um) eine gegebene Figur verlangen, während die umgekehrte Zeichnung einer Figur von der Art der gegebenen um (oder in) eine Figur von der Art der verlangten leichter wäre. In allen diesen Fällen führt man erst die umgekehrte Zeichnung einer Figur aus, und sucht dazu rückwärts die ähnliche (vergl. z. B. auch die Zeichnung eines Kreisvierecks in einem gegebenen Kreis im nächsten Teile dieses Lehrbuches).

Erkl. 228. Die Zeichnung eines gleichseitigen Dreiecks $D'E'F'$ durch die Ecken ABC geschieht sehr einfach dadurch, dass man durch jede Ecke eine Parallele zu der vorgegebenen Richtung der Seite zieht. Wäre etwa $D'E'$ als einzige Richtung gegeben, so würde man

Antwort. Man zeichne zuerst durch die Ecken ABC des gegebenen beliebigen Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck $D'E'F'$ parallel den gegebenen Seitenrichtungen und sodann durch die Ecken dieses gleichseitigen Dreiecks wieder ein Dreieck $A'B'C'$ mit parallelen Seiten zu denen des ursprünglich gegebenen Dreiecks ABC. Dann bilden diese beiden Hilfsdreiecke $A'B'C'$ mit $D'E'F'$ von selbst eine „vorläufige“ Figur, zu der man noch die ähnliche DEF ins Innere von ABC einzuzeichnen hat. Man erhält den Aehnlichkeitspunkt S durch Verbindung der Ecken AA', BB', CC' und die Eckpunkte ABC durch die Verbindungslinien SD', SE', SF'.

Der Beweis, dass $DE = EF = FD$ ist, wäre folgendermassen zu führen:

Zuerst ist nach Antwort der Frage 22 das Vorhandensein des Aehnlichkeitspunktes S nachzuweisen.

Wegen der Parallelen $AB \parallel A'B'$ ist nun:

$$SA : SA' = SF : SF' = SB : SB'.$$

Wegen der Parallelen $BC \parallel B'C'$ ist dann:

$$SB : SB' = SD : SD' = SC : SC'.$$

Wegen der Parallelen $CA \parallel CA'$ ist endlich:

$$SC : SC' = SE : SE' = SA : SA'.$$

über Linie $D'E'$ irgendwo ein beliebiges gleichseitiges Dreieck zeichnen und zu dessen Seiten die Parallelen durch A und B.

Erkl. 229. Es ist nicht unbedingt erforderlich, dass die Ecken des Dreiecks DEF alle im I n n e r n der Seitenstrecken von ABC liegen, sondern die Ecken des Dreiecks DEF können auch einzeln, oder zu zweien, oder zu dreien auf den V e r l ä n g e r u n g e n der Dreiecksseiten ABC liegen. Dann liegen dementsprechend auch die Ecken von ABC nicht auf den Seiten $D'E'F'$ selbst, sondern auf deren Verlängerungen, und man zieht das Dreieck $D'E'F'$ so, dass nicht dessen Seiten, sondern nur deren V e r l ä n g e r u n g e n durch die Ecken ABC gehen. So gibt es im ganzen s e c h s e r l e i gleichseitige Dreiecke mit gleichbleibender Seitenrichtung, wovon je drei die gleiche und drei die umgekehrte Umlaufsrichtung haben, wie das ursprüngliche Dreieck ABC.

Also:

$$SD:SD' = SE:SE' = SF:SF',$$

und deswegen:

$$DE \parallel E'D',\ EF \parallel E'F',\ FD \parallel F'D',$$

sowie:

$$DE:D'E' = SE:SE' = EF:E'F' = SF:SF' = FD:F'D'.$$

Hieraus folgt wieder:

$$DE:EF:FD = D'E':E'F':F'D'.$$

Nun ist aber:

$$D'E' = E'F' = F'D',$$

also auch:

$$DE = EF = FD.$$

Frage 83. Wie findet man ein V i e r e c k v o n v o r g e s c h r i e b e n e r G e s t a l t, dessen I n h a l t gleich einem gegebenen Quadrate wird?

Antwort. Ist $AB'C'D'$ das gegebene Viereck, dessen Gestalt das gesuchte haben soll, so muss:

$$ABCD \sim AB'C'D'$$

werden; man kann also $ABCD$, wie alle ähnlichen Vierecke, aus $AB'C'D'$ dadurch entstehen lassen, dass man etwa von beliebigen anderen Punkten der Diagonalen AC' Parallelen zu den Seiten $B'C'$ und $C'D'$ nach AB' und AD' hin zieht. Um die Fläche des gegebenen Vierecks $AB'C'D'$ als Rechteck darzustellen, zieht man zu AC' die Mittelparallelen der beiden Teildreiecke $AC'B$ und $AC'D$, sowie die Senkrechten in A und C'. Dann ist das Rechteck $EFGH =$ Viereck $AB'C'D'$. Verwandelt man endlich Rechteck $EFGH$ in ein Quadrat, so ist:

$$EFGH = \overline{EK}^2,$$

also:

$$AB'C'D' = \overline{EK}^2.$$

Nun soll aber:

$$ABCD = J = g^2.$$

Man sucht daher die Grösse x nach Antwort der Frage 77 aus der Gleichung:

$$x^2 \cdot \overline{EK}^2 = g^2,$$

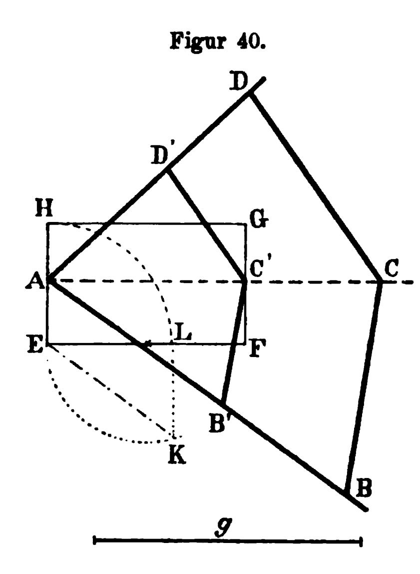
oder:

$$x \cdot EK = g,$$

also:

$$x = \frac{g}{EK}.$$

Figur 40.



Erkl. 230. Dass alle Vierecke ähnlich sind, welche $\sphericalangle BAD$ und Diagonale AC gemeinsam haben, und für welche die Seiten CB und CD von Punkten der Diagonale AC parallel $C'B'$ und $C'D'$ gezogen wird, geht hervor aus Satz 16, 1) oder 2); denn als korrespondierende Winkel sind $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle D = \sphericalangle D'$ und als Winkel mit parallelen Schenkeln $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Ferner verhält sich wegen der Parallelen:

$$AB:AB' = BC:B'C' = AC:AC' = CD:C'D' = AD:AD'.$$

Man hat also von allen derartigen Vierecken dasjenige auszusuchen, dessen Fläche gleich dem Quadrat über der gegebenen Strecke g ist:

$$J = g^2.$$

Erkl. 281. Der Inhalt des Vierecks $A'B'C'D'$ ist die Summe der Dreiecksinhalte:

$$AC'B' + AC'D'.$$

Nun ist z. B. $AC'D'$ gleich dem Produkt aus AC' mit der halben Höhe von D' auf AC'. Wenn aber GH die Seiten AD' und $C'D'$ halbiert, so wird auch diese Höhe von D' auf $A'C'$ durch GH halbiert, also $\triangle AC'D'$ gleich Rechteck $AC'GH$. Ebenso $\triangle AC'B' = AC'EF$, also $AB'C'D' = EFGH$.

Erkl. 282. Die Verwandlung des Rechtecks $EFGH$ in ein Quadrat geschieht in Figur 40 nach Satz 12a des V. Teiles (bezw. Satz 1 in Erkl. 172 des VI. Teiles): Auf Seite EF wird Seite $EH = EL$ aufgetragen, über EF ein Halbkreis errichtet und in L die Senkrechte LK. Dann ist $\overline{EK}^2 = EF \cdot EL = EF \cdot EH$ gleich Rechteck $EFGH$.

Erkl. 283. Die Proportion:

$$EK : g = AC' : AC$$

wird ausgeführt wie in Figur 38, indem man auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels einerseits EK und g anträgt, andrerseits AC' und durch den Endpunkt von g die Parallele zieht zur Verbindungslinie der Endpunkte von EK und AC'.

Und dann ist:

$$AB : AB' = AC : AC' = \cdots = x = g : EK.$$

Man findet also AC als vierte Proportionale der drei Grössen EK, g, AC' aus der Proportion:

$$EK : g = AC' : AC = 1 : x.$$

Dadurch ist Punkt C gefunden und somit auch das Viereck $ABCD$.

Der Beweis, dass:

$$ABCD = I = g^2,$$

ist die Wiederholung der vorigen Ueberlegungen in umgekehrter Folge. Nach Satz 17 verhält sich:

$$ABCD : AB'C'D' = \overline{AB}^2 : \overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{AC'}^2.$$

Nun ist konstruiert:

$$\overline{AC} : \overline{AC'} = g : EK \text{ und } AB'C'D' = \overline{EK}^2,$$

also:

$$\overline{AC}^2 : \overline{AC'}^2 = g^2 : AB'C'D',$$

folglich:

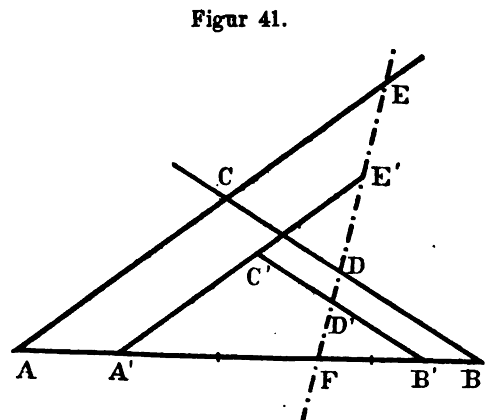
$$ABCD : AB'C'D' = g^2 : AB'C'D',$$

oder:

$$ABCD = g^2.$$

Frage 84. Wie findet man ein Dreieck, bei welchem das durch eine gegebene Gerade nach dem Satz des Menelaos gelieferte Produkt $3\frac{3}{8}$ mal so gross ist als bei einem gegebenen ähnlichen Dreieck?

Figur 41.



Antwort. Ist das Produkt nach dem Satz des Menelaos für das gegebene Dreieck $A'B'C'$ gleich:

$$A'F' \cdot B'D' \cdot C'E' = F'B' \cdot D'C' \cdot E'A'$$

und soll $3\frac{3}{8}$ mal so gross werden bei einem mit $A'B'C'$ ähnlichen Dreieck ABC, so muss:

$$AF = x \cdot A'F', \quad BD = x \cdot B'D', \quad CE = x \cdot C'E'$$

werden, also:

$$AF \cdot BD \cdot CE = x^3 \cdot A'F' \cdot B'D' \cdot C'E'.$$

Nun soll:

$$AF \cdot BD \cdot CE = 3\frac{3}{8} \cdot A'F' \cdot B'D' \cdot C'E'$$

werden, also:

$$x^3 = 3\frac{3}{8}$$

und

$$x = \sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}.$$

Erkl. 284. Besteht zwischen zwei ähnlichen Figuren die Beziehung, dass die Strecken der einen x mal so gross (oder so klein) sind, als die der andern, so sind die Produkte zweier Strecken der einen Figur x^2 mal so gross (oder so klein), als die entsprechenden der andern — und hiezu gehört die Fläche der Figuren. Dagegen sind die Produkte dreier Strecken der einen Figur x^3 mal so gross, als die entsprechenden der andern (und hiezu würden Körperinhalte gehören), die Produkte von vier Strecken der einen Figur x^4 mal so gross, als die der andern u. s. w. Man braucht also zur Auffindung von x im zweiten Falle das Ausziehen der Quadratwurzel, im dritten der Kubikwurzel, dann der vierten u. s. w.

Erkl. 285. Punkt F wird (äusserer) Aehnlickeitspunkt der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nach Art der Figur 14 und Antwort 8) der Frage 42. Daher würde die Verbindungsgerade CC' durch F hindurchgehen. — Der Aehnlichkeitspunkt muss auf der Geraden DEF liegen, damit diese Gerade (als sich selbstentsprechende) für beide Dreiecke dieselbe bleibt.

Erkl. 286. Man beachte wohl, dass die vorliegende Aehnlichkeitsmethode nicht zum erstenmal auftritt, sondern dass Anfänge derselben bereits vorliegen in den Auflösungen der Aufgaben 97 und 149 u. ff. des vorigen VI. Teiles und auch schon in Erkl. 52 dieses Teiles. Auch dort wird eine der gesuchten Figur proportional erst hergestellt und dann die verlangte aufgesucht. Nur erstreckt sich die Proportionalität dort bloss auf einzelne Strecken oder deren Abschnitte, nicht auf die Seiten einer ganzen Figur. Daher ist auch nur das Wort Proportionalität zur Anwendung gebracht, und noch nicht deren Erweiterung zum Begriffe der Aehnlichkeit ganzer Figuren. Der Gedankengang aber ist in beiden Fällen derselbe; nämlich erst Herstellung einer den gegebenen Bedingungen entsprechenden Figur in beliebigem Massstabe, und dann Uebertragung derselben mittels proportionaler Veränderung aller Längengrössen zu den Dimensionen der verlangten Figur.

Folglich muss jeder Abschnitt des Dreiecks ABC, also auch jede Seite desselben $1\frac{1}{2}$ mal so gross gemacht werden, als die entsprechenden Stücke des Dreiecks $A'B'C'$.

Da aber auch die Gerade DEF beibehalten werden muss, geschieht die Vergrösserung des Dreiecks $A'B'C'$ in der Weise, dass etwa AB als Richtung der Grundseite beibehalten wird, und dass man beiderseits des Punktes F die Abschnitte $F'A'$ und $F'B'$ je um ihre Hälfte verlängert und durch die entstehenden Endpunkte A und B Parallelen zieht zu $A'C'$ und $A'B'$. Dann ist das neue Dreieck ABC wegen gleicher Winkel ähnlich $A'B'C'$, also:

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CA:C'A' = 3:2,$$

ebenso nach Konstruktion:

$$AF:A'F = BF:B'F = 3:2,$$

wegen der Parallelen auch:

$$BD:B'D' = BF:B'F = 3:2 = x,$$

also:

$$BD = x\cdot B'D'$$

und ebenso:

$$AE = xA'E',$$

also auch durch Subtraktion:

$$DC = BC - BD = xB'C' - xB'D'$$
$$= x(B'C' - B'D') = x\cdot D'C'$$

und ebenso:

$$CE = x\cdot C'E',$$

also, wie verlangt:

$$AF\cdot BD\cdot CE = x\cdot A'F'\cdot x\cdot B'D'\cdot x\cdot C'E'$$
$$= x^3\cdot A'F'\cdot B'D'\cdot C'E',$$

worin:

$$x^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$$

Aufgaben-Sammlung.

1) Aufgaben über die Aehnlichkeit der Dreiecke oder beliebiger Figuren im allgemeinen.

(Zu Abschnitt 1.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll aus dem täglichen Leben Fälle von ähnlichen Figuren nennen.

Erkl. 287. Eine Nachbildung eines Bildes heisst dann richtig oder genau, wenn eben die Aehnlichkeit eine vollständige ist. In dieser Beziehung hat schon das unbestimmte Gefühl ein Bewusstsein räumlicher Uebereinstimmung: und Aufgabe der geometrischen Wissenschaft ist es, solche halb unbewusste Anschauungsbegriffe nach ihrem eigentlichen Wesen festzustellen, aufzulösen und klarzulegen.

Erkl. 288. Dieselbe Schriftgattung kann in kleinerer und grösserer Buchstabengrösse angewendet werden (z. B. die drei Schriftgrössen, mit welcher die Fragen, die Aufgaben und die Erklärungen dieses Buches gedruckt sind). Und solche sind einander ähnlich, indem nur die Grösse verschieden, aber Winkel und Seitenverhältnisse gleich sind. Dagegen sind schon die Schriftgattungen, mit welchen das Wort „Aufgabe“ und „Auflösung“ gedruckt ist, und noch mehr jene der Kapitelüberschriften weder unter sich, noch mit den oben genannten Schriftarten ähnlich.

Auflösung. Fälle von ähnlichen Figuren aus dem täglichen Leben wären folgende:

Ein Gemälde und eine Nachbildung desselben als Stich, Photographie u. s. w. in beliebiger Verkleinerung oder Vergrösserung.

Gleiche Buchstaben des Alphabets oder Ziffern in verschiedenen Druckschriften derselben Schriftgattung.

Manche grossen und kleinen Buchstaben des gleichen Alphabets, z. B. o, O; s, S; v, V; w, W; x, X; z, Z.

Eine Landkarte, Stadtplan u. s. w. und die dadurch dargestellte Gegend, Stadt u. s. w.

Die Kreuzungen zweier Strassen unter gleichem Winkel: sowohl wenn beide kreuzenden Strassen gleiche Breite haben, als wenn jedesmal eine der kreuzenden Strassen nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w. mal so breit ist, als die andere.

Aufgabe 2. Man soll Fälle von Figuren nennen, welche:

1) übereinstimmende Gestalt, aber ungleiche Flächengrösse,

2) übereinstimmende Grösse, aber ungleiche Gestalt,

3) übereinstimmende Gestalt und Grösse besitzen.

Erkl. 289. Die geometrischen Schriftzeichen für die genannten drei Fälle sind:

1) $\sim$ (ähnlich) für gleiche Gestalt bei ungleicher Fläche,

2) $=$ (inhaltsgleich) für gleiche Fläche bei ungleicher Gestalt,

3) $\cong$ (kongruent) für gleiche Gestalt und gleiche Fläche.

Dabei ist vom allgemeineren zum besonderen fortgeschritten. Und daher ist die Behandlung des letzten Falles, als des leichtesten, schon Gegenstand der ersten vier Teile dieses Lehr-

Auflösung. 1) Figuren mit übereinstimmender Gestalt, aber ungleicher Grösse sind alle in voriger Antwort genannten, nämlich alle ähnlichen Figuren, z. B. noch ein grosses Quadrat und ein kleines.

2) Figuren mit nicht übereinstimmender Gestalt, aber gleicher Grösse wären etwa zwei Grundstücke von je 7 Ar Fläche, von denen das eine die Gestalt eines Dreiecks, das andere die Gestalt eines Rechtecks hat, oder zwei gleichgrosse Rechtecke, bei deren einem das Seitenverhältnis den Wert 1 : 2 hat, während beim andern 1 : 3.

3) Figuren mit gleicher Gestalt und Grösse sind alle kongruenten Figuren, also etwa Seite 100 dieses Buches in verschiedenen Exemplaren desselben, oder zwei

buches, die des zweiten Falles Gegenstand des fünften, die des ersten aber Gegenstand der letzten drei Teile (VI, VII, VIII) desselben.

Erkl. 240. In nebenstehender Auflösung ist jedesmal ein Fall vom Rechteck als Beispiel gewählt: Quadrate sind stets ähnlich, da alle Winkel und Seitenverhältnisse gleich sind (erstere 90°, letztere 1 : 1 : 1). Rechtecke sind ähnlich, wenn das Seitenverhältnis gleich ist, denn die Winkel sind schon gleich. Ueber Herstellung von Rechtecken der in 2) genannten Art sehe man unten in Aufgabe 24.

Rechtecke gleicher Fläche, bei denen beiden das Seitenverhältnis $m:n$ besteht.

Aufgabe 3. Die Seiten eines Dreiecks sollen sich verhalten wie $a:b:c = 3:5:7$ oder wie $m:n:p$. Ausserdem kenne man:

1) $a = 10$ oder $= x$;

2 $b = 2$ oder $= y$;

3) $c = \sqrt{6}$ oder $= z$.

Man soll die anderen Seiten dieser Dreiecke berechnen und Erkl. 5 daran bestätigen.

Erkl. 241. Setzt man für a_1, b_1, c_1 in Erkl. 5 die Grössen 3, 5, 7 so wird für die drei Dreiecke, je mit Seiten a_2, b_2, c_2 in Zahlen in nebenstehender Auflösung:

$$a_1:b_1 = 3:5 = 10:16\frac{2}{3} = 1{,}2:2 = \frac{3}{7}\sqrt{6}:\frac{5}{7}\sqrt{6},$$

$$b_1:c_1 = 5:7 = 16\frac{2}{3}:23\frac{1}{3} = 2:2{,}8 = \frac{5}{7}\sqrt{6}:\sqrt{6},$$

$$c_1:a_1 = 7:3 = 23\frac{1}{3}:10 = 2{,}8:1{,}2 = \sqrt{6}:\frac{3}{7}\sqrt{6},$$

$$a_1:b_1:c_1 = 3:5:7 = 10:16\frac{2}{3}:23\frac{1}{3} = 1{,}2:2:2{,}8 = \frac{3}{7}\sqrt{6}:\frac{5}{7}\sqrt{6}:\sqrt{6}.$$

oder:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = x$$

erst:

$$= \frac{3}{10} = \frac{5}{16\frac{2}{3}} = \frac{7}{23\frac{2}{3}};$$

dann:

$$x = \frac{3}{1{,}2} = \frac{5}{2} = \frac{7}{2{,}8},$$

endlich:

$$x = \frac{3}{\frac{3}{7}\sqrt{6}} = \frac{5}{\frac{5}{7}\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Auflösung. 1) Soll $a:b:c = 3:5:7$ und man hat $a = 10$, so muss $10:b = 3:5$ und $10:c = 3:7$, also:

$$b = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}, \quad c = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3};$$

oder für $a:b:c = m:n:p$ und $a = x$ wird $x:b = m:n$, $x:c = m:p$, also:

$$b = \frac{nx}{m}, \quad c = \frac{px}{m}.$$

2) Soll $a:b:c = 3:5:7$ und $b = 2$, so wird $a:2 = 3:5$ und $2:c = 5:7$, also:

$$a = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ und } c = \frac{14}{5} = 2{,}8;$$

für $a:b:c = m:n:p$ und $b = y$ wird:

$$a:y = m:n, \quad y:c = n:p,$$

also:

$$a = \frac{my}{n}, \quad c = \frac{p}{n}\cdot y.$$

3) Soll $a:b:c = 3:5:7$ und $c = \sqrt{6}$, so wird $a:\sqrt{6} = 3:7$ und $b:\sqrt{6} = 5:7$, also:

$$a = \frac{3}{7}\sqrt{6} \text{ und } b = \frac{5}{7}\sqrt{6};$$

für $a:b:c = m:n:p$ und $b = y$ wird:

$$a:z = m:p, \quad b:z = n:p,$$

also:

$$a = \frac{m}{p}\cdot z, \quad b = \frac{n}{p}\cdot z.$$

Bei allen solchen Fällen ist aber wohl darauf zu achten, dass ein Dreieck mit Seitenverhältnis 3 : 5 : 7 oder $m:n:p$ nur dann thatsächlich möglich ist, wenn auch die Stücke 3, 5, 7 selber oder m, n, p die Seiten eines wirklichen Dreiecks liefern können, d. h. den Bedingungen genügen, dass

oder:

$$a_2 = \frac{10}{3} a_1, \text{ bezw. } = \frac{2}{5} a_1, \text{ bezw. } = \frac{\sqrt{6}}{7} \cdot a_1,$$

$$b_2 = \frac{10}{3} b_1, \text{ bezw. } = \frac{2}{5} b_1, \text{ bezw. } = \frac{\sqrt{6}}{7} \cdot b_1,$$

$$c_2 = \frac{10}{3} c_1, \text{ bezw. } = \frac{2}{5} c_1, \text{ bezw. } = \frac{\sqrt{6}}{7} \cdot c_1.$$

die Summe je zweier grösser als die dritte, und damit auch die Differenz je zweier kleiner als die dritte. So wäre **unmöglich** ein Dreieck mit Seitenverhältnis $3:5:8$ oder $3:5:9$, da $3+5=8$ bezw. $3+5<9$, also auch $8-3=5$ bezw. $9-3>5$ und $8-5=3$ bezw. $9-5>3$.

Erkl. 242. Ebenso entsteht für die drei Dreiecke mit Verhältnis $m:n:p$ erst:

$$a_1 : b_1 : c_1 = m:n:p = x : \frac{nx}{m} : \frac{px}{m} = \frac{my}{n} : y : \frac{py}{n} = \frac{m}{p} \cdot z : \frac{n}{p} \cdot z : z,$$

oder:

$$\varkappa = \frac{x}{m}, \text{ bezw. } = \frac{y}{n}, \text{ bezw. } = \frac{z}{p},$$

so dass jede der Seiten m, n, p, um a_2, b_2, c_2 zu erhalten, multipliziert werden muss mit

$$\frac{x}{m}, \text{ bezw. } = \frac{y}{n}, \text{ bezw. } = \frac{z}{p}.$$

Erkl. 243. Wäre bei drei Grössen $a_1 : b_1 : c_1$ oder $m:n:p$ etwa $m+n>p$, so wäre auch bei den drei Grössen $a_2 b_2 c_2$ oder $\varkappa m : \varkappa n : \varkappa p$ wieder $\varkappa m + \varkappa n$ oder $\varkappa(m+n) > \varkappa p$, indem bei voriger Ungleichung jedes Glied mit $\varkappa$ multipliziert wird, also auch $a_2 + b_2 > c_2$.

Aufgabe 4. Es sei gegeben eine beliebige Figur $A_1 B_1 C_1 D_1 \cdots$. Man soll dieselbe in **ähnlicher Gestalt** nachzeichnen, so dass statt der Länge $A_1 B_1 = a_1$ die Länge $A_2 B_2 = a_2$ auftritt.

Erkl. 244. Streng genommen braucht man nur **eine Strecke weniger** zu konstruieren, als die Anzahl aller vorhandenen beträgt, und zwei Winkel weniger anzutragen. Denn wenn der letzte Eckpunkt der Figur $A_2 B_2 C_2 D_2$ konstruiert ist, so muss die **Verbindungslinie** derselben mit A_2 von selbst die richtige Länge haben und die richtigen Winkel mit der vorhergehenden Seite und mit der folgenden Seite a_2 bilden. Der Beweis für diese Thatsache folgt aus Satz 16 über Aehnlichkeit der Vielecke. Doch dient es zur willkommenen Bestätigung aller Einzelkonstruktionen, wenn auch diese letzte zur Prüfung wirklich noch ausgeführt wird.

Auflösung. Wenn $A_2 B_2 C_2 D_2 \cdots$ ähnlich werden soll zur Figur $A_1 B_1 C_1 D_1 \cdots$, so muss:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 \cdots.$$

Man konstruiert oder berechnet also nach dieser Proportion erst die Strecken b_2, c_2, $d_2 \cdots$ und trägt dieselben in genau **derselben Reihenfolge** aneinander an, wie a, b, c, d aneinander liegen, indem man die eingeschlossenen Winkel genau ebenso gross macht, wie bei $A_1 B_1 C_1 D_1 \cdots$. Dann wird die neu entstehende Figur der ursprünglich gegebenen ähnlich.

Aufgabe 5. Man soll die Aufgaben 197 bis 200 des III. Teiles in Rücksicht der Aehnlichkeitssätze betrachten.

Erkl. 245. Der im nebenstehenden erwähnte zweite Fall hat noch eine Unterabteilung, nämlich Gleichheit einer Seite und deren Gegenwinkel (statt deren anliegendem Winkel). Dabei gilt nach den Sätzen über Peripheriewinkel und Sehnenlänge im Kreis ebenfalls, wie nebenstehend, dass jede der andern Seiten zugleich

Auflösung. In den Aufgaben 197 bis 200 des III. Teiles werden solche Dreiecke betrachtet, welche entweder:

1) zwei Seiten, oder

2) eine Seite und einen Winkel, oder

3) zwei Winkel gleichgross haben.

mit ihrem Gegenwinkel grösser oder kleiner ist, als die andere Seite und deren Gegenwinkel. Denn wenn Punkt A in Figur 43 des IV. Teiles die Peripherie durchläuft, so wächst AB, während AC abnimmt und gleichzeitig wächst Winkel BCA, während Winkel ABC abnimmt.

Erkl. 246. Während der dritte Fall nebenstehender Auflösung durch die Aehnlichkeitssätze ins Gebiet der elementaren Planimetrie einbezogen wird, bleiben die beiden anderen der Trigonometrie vorbehalten. Nicht zwar das Verhältnis zwischen Seite und Winkel selbst, wohl aber dasjenige zwischen Seite und Sinus des Winkels bleibt bei all diesen Veränderungen massgebend. Und zwar ist im ersten Falle, wenn c und b gleichgross bleiben, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Je grösser also β wird, desto kleiner $\frac{a}{\sin\alpha}$. Wenn also a grösser wird, muss auch α grösser werden, und zwar in noch stärkerem Verhältnis als a. Im zweiten Falle, wenn c und β gleichgross bleiben, muss wieder $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Je grösser also $\sin\gamma$ wird, desto kleiner $\frac{a}{\sin\alpha}$. Und da mit Vergrösserung von γ die Seite a abnimmt, so entsteht dieselbe Folgerung. Im Falle der Erkl. 245 aber behalten die drei Brüche $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ konstanten Wert, so dass jedenfalls Zähler und Nenner gleichzeitig ab- oder zunehmen müssen.

Dabei fand sich eine Abhängigkeit der Seiten bezw. Winkel in der Art, dass:

1) bei zwei gleichen Seiten die dritte Seite und deren Gegenwinkel gleichzeitig grösser und kleiner werden, dass

2) bei Gleichheit einer Seite und ihres anliegenden Winkels die zweite Schenkelseite dieses Winkels und deren Gegenwinkel gleichzeitig grösser und kleiner werden, dass

3) bei Gleichheit zweier Winkel alle drei Seiten gleichzeitig grösser und kleiner werden.

Von diesen drei Fällen ist nun der dritte durch die Aehnlichkeit wieder aufgenommen und zu dem festen Ergebnis geführt, dass in diesem Falle nicht nur allgemein gleichzeitiges Grösser- und Kleinerwerden eintritt, sondern dass das Verhältnis je zweier entsprechenden Seiten gleichgross bleibt. Bei den beiden anderen Fällen aber ist keine elementare Beziehung zwischen dem gleichzeitigen Anwachsen bezw. Abnehmen von Winkeln und Seiten anzugeben.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll weitere Fälle nach Aufgabe 1 nennen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 7. Man soll die Fälle voriger Aufgabe auch auf körperliche Begriffe ausdehnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1.

Aufgabe 8. Man soll geographische Beispiele nach Aufgabe 2 angeben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 2.

Aufgabe 9. Man soll Beispiele nach Aufgabe 2 vom Rhombus hernehmen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 2.

Aufgabe 10. Man soll in folgenden Beispielen den Wert der unbekannten Dreiecksseite berechnen und konstruieren:

$$a_1 : b_1 : c_1 = 2 : 4 : 5 = 7 : b_2 : c_2$$
$$= a_3 : \frac{2}{3} : c_3$$
$$= a_4 : b_4 : \sqrt{10}.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 11. Dieselbe Aufgabe für folgende Beispiele zu lösen:

$$a_1 : b_1 : c_1 = \sigma : \tau : v = s : b_2 : c_2$$
$$= a_3 : t : c_3$$
$$= a_4 : b_4 : y.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3.

Aufgabe 12. Den Wert der Verhältnisgrösse x für beide vorigen Aufgaben aufzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3 und Erkl. 241.

Aufgabe 13. Gibt es Dreiecke mit Seitenverhältnis 2 : 3 : 6 und warum nicht?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 3 und Erkl. 243.

Aufgabe 14. Man soll Figur 3 im dreifachen (bezw. im halben) Massstab nachzeichnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 4.

Aufgabe 15. Man soll besondere Grenzfälle des zweiten Falles der Aufgabe 5 angeben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 5 und Erkl. 246.



2) Aufgaben über die Anwendung der Aehnlichkeit auf das allgemeine Dreieck.

(Zu Abschnitt 2.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Man soll den einen der Sätze in Erkl. 38 unmittelbar beweisen.

Auflösung. Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht wie in Erkl. 39. Wird vorausgesetzt, dass:

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$$

und

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim A_3B_3C_3,$$

so ist:

$$\sphericalangle A_1 = A_2, \quad \sphericalangle B_1 = B_2, \quad \sphericalangle C_1 = C_2;$$
$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2$$

und

$$\sphericalangle A_1 = A_3, \quad \sphericalangle B_1 = B_3, \quad \sphericalangle C_1 = C_3;$$
$$a_1 : b_1 : c_1 = a_3 : b_3 : c_3,$$

also folgt:

$$\sphericalangle A_2 = A_3, \quad \sphericalangle B_2 = B_3, \quad \sphericalangle C_2 = C_3;$$
$$a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3,$$

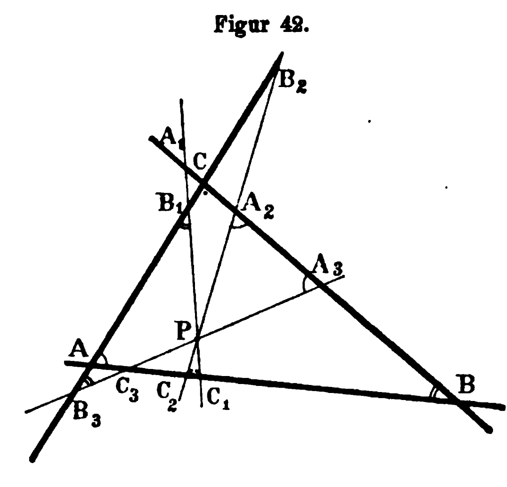
d. h.:

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim A_3B_3C_3.$$

Erkl. 247. Man hat sich zu hüten vor der falschen Anwendung dieser Schlussweise, nämlich vor Annahme der Kongruenz unter solchen Figuren. Wenn $A_1B_1C_1$ mit $A_2B_2C_2$ kongruent, und $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ ähnlich ist, so folgt nicht, dass $A_2B_2C_2$ mit $A_3B_3C_3$ kongruent ist, sondern nur, dass diese beiden ähnlich sind.

Aufgabe 17. Durch einen gegebenen Punkt P im Innern eines Dreiecks ABC soll eine Gerade gezogen werden, so dass das abgeschnittene Dreieck dem ganzen ähnlich wird.

Figur 42.



Auflösung. Je nachdem man den gegebenen Punkt auffasst, als liegend im Winkel α oder im Winkel β oder im Winkel γ, kann man die Aufgabe lösen durch Konstruktion entweder einer Parallelen oder einer Antiparallelen zur Gegenseite dieses Winkels. **Man erhält also durch denselben Punkt P sechs Gerade, deren jede ein dem ganzen Dreieck ähnliches Dreieck abschneidet.**

Dabei bildet jede Parallele nur ein einziges neues Dreieck; jede Antiparallele aber drei neue Dreiecke (weil sie sämtliche drei Seiten schneidet), nämlich mit jeder Ecke des ursprünglichen Dreiecks und deren zwei Seiten ein Dreieck, dessen Grundseite sie selbst ist. Von diesen ist eines dem ursprünglichen Dreieck ähnlich, nämlich dasjenige mit dem Winkel, in welchem die Antiparallele konstruiert wurde. Die beiden anderen neuen Dreiecke sind untereinander ähnlich wegen Gleichheit aller Winkel. So hat man in Figur 42:

Im Winkel α antiparallel BC und $A_1B_1C_1$, folglich:

$$ABC \backsim AB_1C_1 \text{ und } A_1BC_1 \backsim A_1B_1C,$$

im Winkel β antiparallel CA und $A_2B_2C_2$, folglich:

$$ABC \backsim A_2BC_2 \text{ und } A_2B_2C \backsim AB_2C_2,$$

im Winkel γ antiparallel BC und $A_3B_3C_3$, folglich:

$$ABC \backsim A_3B_3C \text{ und } A_3BC_3 \backsim A_3B_3C.$$

Erkl. 248. Die Zeichnung der Antiparallelen durch einen gegebenen Punkt P geschieht dadurch, dass man die Seitenstrecken des zu betrachtenden Winkels auf vertauschten Schenkeln anträgt und zur Verbindungslinie ihrer neuen Endpunkte die Parallele durch P legt.

Erkl. 249. Die drei Parallelen liegen selbstverständlich alle im Innern des gegebenen Dreiecks; eine Antiparallele kann ihre antiparallele Dreiecksseite im Innern der Seitenstrecke treffen. Dann ragt auch das gesuchte Dreieck, welches dem gegebenen ähnlich ist, über diese Seite des ursprünglichen hervor. Von den beiden anderen neuen Dreiecken, welche einander ähnlich werden, liegt stets das eine ganz ausserhalb des gegebenen, das andere ragt über das ursprüngliche heraus um eben das vom vorigen Dreieck gebildete Stück.

Erkl. 250. Dass die beiden letzten Dreiecke ähnlich sind, kann man entweder aus der einzelnen Aufstellung der Gleichheit entsprechender Winkel entnehmen, oder kürzer daraus, dass nach Erkl. 113 des VI. Teiles nicht nur die neue und vorherige Grundseite im Winkel der beiden anderen Seiten antiparallel sind, sondern auch diese beiden Dreiecksseiten antiparallel sind im Winkel der neuen und vorigen Grundseite.

Aufgabe 18. Zu einem gegebenen Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels und seiner Schenkelrichtungen ein ähnliches herzustellen, welches gegebenen Umkreisradius hat.

Auflösung. Durch den Radius des Umkreises und den beizubehaltenden Winkel ist

Erkl. 251. Die vorliegende Aufgabe ist im wesentlichen dieselbe, wie die früher gelöste, in einen gegebenen Kreis ein Dreieck von gegebenen Winkeln einzuzeichnen (Aufgabe 99 des IV. Teiles). Während aber in dieser letzteren Aufgabe die Lage gleichgültig blieb, stellt die nebenstehende Aufgabe die Anforderung bestimmter Lage. Um dies zu erreichen, müsste die vorgenannte Aufgabe für sich allgemein gelöst werden, und dann die erhaltenen Seiten des beizubehaltenden Winkels angetragen werden.

Erkl. 252. Eine weitere Art der Lösung dieser Aufgabe geschieht mittels der Aehnlichkeitsmethode (siehe Abschnitt 8).

auch die Grösse der Gegenseite bestimmt. Denn zu gegebenem Peripheriewinkel gehört eine bestimmte Grösse als Sehne.

Man zeichnet also den verlangten Kreis, legt in denselben den gegebenen Dreieckswinkel als Peripheriewinkel ein und trägt die entstehende Sehne in das gegebene Dreieck ein — parallel oder antiparallel mit der ursprünglichen Gegenseite des beibehaltenen Winkels.

Das so entstehende neue Dreieck hat gleiche Winkel wie das gegebene, und besitzt den gegebenen Umkreisradius.

Aufgabe 19. Man soll die Antworten der Fragen 13 u. ff. unmittelbar aus den Werten der Dreieckselemente ableiten.

Erkl. 253. Statt mit der Proportion:
$$h_a : h_b = b : a,$$
kann man auch den Beweis für die Höhen führen mittels der Formel:
$$h_a = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
Wird hier wieder $a = x \cdot a'$ u. s. w., so entsteht auch $h_a = x \cdot h_a'$.

Dasselbe Verfahren gilt für Abschnitte, wie p und q. Denn aus Antwort der Frage 36 des V. Teiles wurde:
$$p_a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$
also wieder $p_a = x \cdot p_a'$.

Letzteres Ergebnis entsteht auch unter Benutzung des vorhergehenden für die Höhen durch den Ansatz:
$$p_a = \sqrt{b^2 - h_a^2}.$$
Wenn hierin $b = xb'$, $h_a = x \cdot h_a'$ gesetzt wird, so hat man wieder $p_a = x \cdot p_a'$.

Erkl. 254. Für die von den Winkelhalbierenden gebildeten Abschnitte u, v lässt sich der Beweis besonders leicht auch aus dem Satz 11 des VI. Teiles entnehmen. Hiernach verhalten sich diese Abschnitte wie zwei anliegende Seiten, also gilt für die Abschnitte der Halbierungslinie sowohl des Innenwinkels als des Aussenwinkels:
$$u_c : v_c = a : b,$$
und im ähnlichen Dreieck:
$$u_c' : v_c' = a' : b'.$$
Da also:
$$a : b = a' : b',$$
so wird auch:
$$u_c : v_c = u_c' : v_c',$$
also:
$$u : u' = v : v' = a : a' = \cdots$$
Und ähnliches gilt von anderen Abschnitten.

Auflösung. Für die Höhen des Dreiecks hat man nach Antwort der Frage 16 des V. Teiles in zwei ähnlichen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ etwa:
$$a : b = h_b : h_a; \quad a' : b' = h_b' : h_a'.$$
Wird also:
$$a : b = a' : b',$$
so muss auch:
$$h_b : h_a = h_b' : h_a'$$
oder:
$$h_a : h_a' = h_b : h_b' = a : a' = b : b'.$$

2) Für die Mittellinien ist nach Antwort der Frage 49 des V. Teiles:
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$
$$m_a' = \frac{1}{2} \sqrt{2(b'^2 + c'^2) - a'^2}.$$
Wird also:
$$a : b : c = a' : b' : c',$$
so kann man setzen:
$$a : a' = b : b' = c : c' = x$$
oder:
$$a = xa', \quad b = xb', \quad c = xc'.$$
Folglich:
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b'^2 + c'^2)x^2 - a'^2 \cdot x^2}$$
$$= x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2(b'^2 + c'^2) - a'^2} = x \cdot m_a'.$$
Also wieder:
$$m : m' = x = a : a' = b : b' \cdots$$

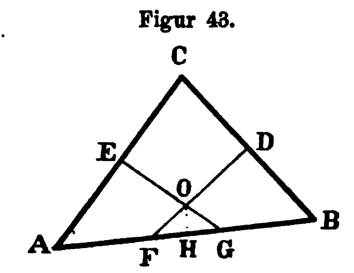
3) Für die Winkelhalbierenden gilt nach Antwort der Frage 56 des V. Teiles:
$$w_a = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bcs(s-a)},$$
also w_a derselbe Ausdruck mit den gestrichenen Buchstaben. Wird hier wieder wie zuvor gesetzt:
$$a = x \cdot a', \quad b = x \cdot b', \quad c = x \cdot c,$$

also auch $s = \varkappa \cdot s'$, so wird auch wieder $w = \varkappa \cdot w'$, also $w : w' = a : a' = \cdots$

4) Dasselbe Verfahren gilt auch für alle anderen Elemente ähnlicher Dreiecke, welche in den Seiten ausgedrückt sind.

Aufgabe 20. Man soll die Aehnlichkeit der Teildreiecke unmittelbar beweisen, welche in ähnlichen Dreiecken gebildet werden durch eine Seite und die beiden anderen Mittelsenkrechten.

Figur 43.



Erkl. 255. Die Proportionalität der Mittelsenkrechten selbst kann entweder entnommen werden aus der Winkelgleichheit in den Dreiecken BOA und $B'O'A'$, deren Höhe die Mittelsenkrechte OH ist; oder aus der algebraischen Formel für die Stücke n_a, n_b, n_c; oder aus der Gleichheit jeder solchen Strecke OH mit der Hälfte des oberen Höhenabschnitts auf der zur gleichen Seite c gehörigen Höhe u. s. w.

Erkl. 256. Bei anderer Grösse der Winkel des Dreiecks ABC in Figur 43 erhalten die Mittelsenkrechten, also auch das Dreieck FGO verschiedene andere Lage an der Seite AB.

Auflösung. Ist DOF bezw. EOG je die Mittelsenkrechte der Seite a und b, so wäre zu untersuchen das Dreieck OFG. Nun ist für die Dreiecke BDF der:

$$\sphericalangle B = B', \quad \sphericalangle D = D' = 90^0,$$

also $\sphericalangle F = F'$. Aus gleichem Grunde für die Dreiecke AEG der:

$$\sphericalangle A = A', \quad \sphericalangle E = E' = 90^0,$$

also $\sphericalangle G = G'$. Daher sind auch in den Dreiecken FOG und $F'O'G'$ die drei Winkel gleich, also die Dreiecke ähnlich, und ausser der Winkelgleichheit auch:

$$FG : F'G' = GO : G'O' = FO : F'O'.$$

Um noch zu zeigen, dass dieses Verhältnis auch wirklich gleich $\varkappa = a : a'$ ist, ziehe man etwa die Mittelsenkrechte OH, von der bekannt ist, dass $OH : O'H' = \varkappa$ ist. Dann folgt sofort:

$$OF : O'F' = OH : O'H' = \varkappa,$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 21. Man soll umgekehrt an Figur 43 beweisen, dass:

$$\triangle ABC \backsim A'B'C'$$

sein muss, wenn die von zwei Winkelhalbierenden und ihrer Gegenseite gebildeten Dreiecke FOG ähnlich sind.

Auflösung. Wenn $FOG \backsim F'O'G'$, so ist auch im Dreieck FDB:

$$\sphericalangle F = F', \quad \sphericalangle D = D' = 90^0,$$

also $B = B'$, aus gleichem Grunde $A = A'$ im Dreieck AEG, also $ABC \backsim A'B'C'$.

Aufgabe 22. Man soll nachweisen, warum in Erkl. 51 der Winkel der „kleineren" Strecke genannt werden musste, und warum nicht nur der Grösse, sondern auch der Lage nach.

Erkl. 257. Der in Erkl. 51 als Beispiel angeführte Aehnlichkeitssatz kann auf verschiedene Arten bewiesen werden:

1) Man kann durch direkt geometrischen Beweis aus den vorhandenen Angaben und den

Auflösung. 1) Von den durch Winkelhalbierende und Mittellinie gebildeten Teildreiecken kennt man das Verhältnis zweier Seiten $m : w$. Um dann die Aehnlichkeit feststellen zu können, genügt nicht die Gleichheit eines Winkels im allgemeinen, sondern es muss der der grösseren Seite gegenüberliegende sein, — also der Winkel

Beziehungen der Mittellinie und Winkelhalbierenden zu den Seiten die Aehnlichkeit der Dreiecke (mca), (mcb) bezw. (wca), (wcb) nachweisen und dadurch die Gleichheit der Winkel α, β, γ.

2) Man kann nach den Formeln im V. Teile dieses Lehrbuches erst aus den Seiten a, b, c die Stücke des Dreiecks (mwc) berechnen und aus diesem rückwärts a, b, c, um so die Proportionalität der Seiten zu erhalten.

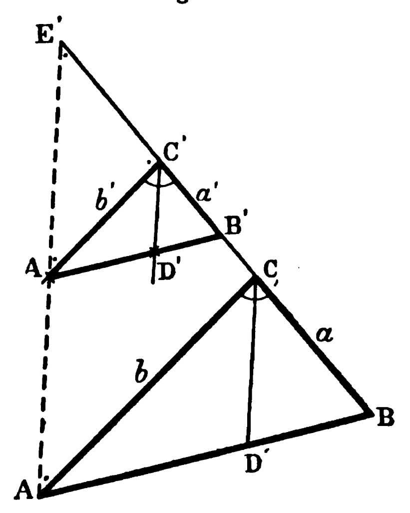
3) Man kann durch indirekten Beweis schliessen, dass die Dreiecke (m, w, c) nur dann ähnlich werden können, wenn ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind. Und letzteres ist im vorliegenden Falle der leichteste Weg.

zwischen der kleineren dieser beiden Strecken und der Dreiecksseite.

2) Gleiche Lage dieses Winkels in den beiden in Beziehung gesetzten Dreiecken ist nötig, da jede Transversale zwei Nebenwinkel mit der Gegenseite bildet, die einen auf gleicher, die anderen auf ungleicher Seite der zweiten Transversalen. Um also die Aehnlichkeit der Dreiecke sicher zu stellen, muss der gleichgrosse Winkel beidemale diesseits oder beidemale jenseits dieser Transversalen liegen.

Aufgabe 23. Man soll ein Dreieck konstruieren, von dem gegeben ist das Verhältnis $b:w$, Winkel γ und die Summe der Seiten a und b.

Figur 44.



Erkl. 258. In Figur 44 ist Dreieck:

$$ABC \backsim A'B'C',$$

da die sämtlichen Winkel parallele Schenkel haben. In $A'B'C'$ hat das Verhältnis $b':w'$ den verlangten Wert nach Konstruktion, folglich hat auch im ähnlichen Dreieck ABC das Verhältnis $b:w$ denselben Wert.

Erkl. 259. Konstruktionsaufgaben der nebenstehenden Art lassen sich in unbegrenzter Menge bilden. Da ein besonderes Lehrbuch dieser Encyklopädie von den Konstruktionsaufgaben ausschliesslich handelt, so genügt es an dieser vorliegenden Stelle eine solche Aufgabe als Muster vorzuführen. Für weitere Arten gleichwertiger Aufgaben ist zu verweisen auf:

E. R. Müller,
Lehrbuch der Konstruktionsaufgaben.

Auflösung. Da Winkel:

$$(bw) = (aw) = \frac{\gamma}{2},$$

so erhält man unmittelbar die Richtung der drei Linien b, w, a. Trägt man also auf den beiden ersteren Schenkeln zwei Strecken an, deren Verhältnis gleich dem gegebenen ist, so erhält man durch Verbindung der Endpunkte ein dem verlangten ähnliches Dreieck $A'B'C'$. Um nunmehr $a'+b'$ auf die verlangte Grösse zu bringen, verlängere man etwa a' über C' um b' und verbinde den neuen Endpunkt E' mit A'. Auf dem Schenkel $E'B'$ trägt man die gegebene Strecke $a+b$ ab, nimmt den jetzigen Endpunkt B als Eckpunkt B des Dreiecks ABC und zieht:

$$BA \parallel B'A', \; AC \parallel A'C' \text{ und } CD \parallel C'D'.$$

Dann ist:

1) $AC:CD = A'C':C'D' = b:w$,

2) $\sphericalangle ACB = A'C'B' = \gamma$,

und

3) $\sphericalangle E'A'C' = E'AC = AE'C$,

also:

$$E'C = AC = b,$$

so dass auch:

$$E'B = CB + E'C = CB + AC = a + b.$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1338. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.



Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1337. — Seite 97—112.
Mit 8 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen **Trigonometrie,** synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, **Differential-** u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**
Fortsetzung von Heft 1337. — Seite 97—112. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 24. Wie gross wird die Fläche (Seite) eines Dreiecks, von dem eine Seite oder beliebige Strecke (Fläche) $2, 3, \cdots 5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, \cdots n$ mal so gross oder so klein wird, als in einem ähnlichen Dreieck?

Erkl. 260. Dreimal so klein heisst soviel als $\frac{1}{3}$ der vorigen Grösse (vergl. Erkl. 6 des VI. Teiles); mit Brüchen bedeutet ebenso $1\frac{2}{7}$ mal so gross $\frac{9}{7}$ der vorigen Grösse, dagegen $1\frac{2}{7}$ mal so klein $\frac{7}{9}$ der vorigen Grösse; $\frac{3}{8}$ mal so gross das $\frac{3}{8}$ fache, aber $\frac{3}{8}$ mal so klein das $\frac{8}{3}$ fache des vorigen.

Auflösung. Nach Satz 8 wird die Fläche soviel mal so gross oder so klein, als das Quadrat der Verhältniszahl entsprechender Längen angibt, also in nebenstehenden Fällen $4, 9, \cdots 30\frac{1}{4}, 5\frac{4}{9}, \cdots n^2$ mal so gross oder so klein $\left[\text{bezw. } \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots \frac{4}{121}, \frac{9}{49}, \cdots \frac{1}{n^2} \text{ der andern Fläche}\right]$.

Die Seite dagegen wird umgekehrt nur mit dem Faktor multipliziert, welcher die Wurzel aus dem vorigen ist, also:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{22},\ \frac{1}{3}\sqrt{21}, \cdots \sqrt{n},$$

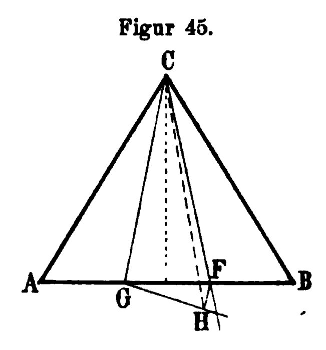
bezw.:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ \frac{1}{11}\sqrt{22},\ \frac{1}{7}\sqrt{21},\ \frac{1}{n}\sqrt{n}.$$

Aufgabe 25. Man soll die Antwort der Frage 56 auf Dreiecke mit feststehenden Winkeln anwenden.

Erkl. 261. Es ist die Aufgabe der Trigonometrie, die gleichbleibende Grösse solcher Schnittwinkel in Dreiecken mit feststehenden Winkeln ein für allemal zu berechnen. Mit ihren Mitteln, und nicht mit solchen der Elementarplanimetrie ist es möglich anzugeben, welchen Winkel z. B. im Dreieck mit Winkeln 50°, 60°, 70° die Mittellinie vom Scheitel des Winkels 50° mit den Nachbarseiten, und welche sie mit der Gegenseite oder welchen sie mit den anderen Winkelhalbierenden bildet.

Figur 45.



Erkl. 262. In Aufgabe 123 des III. Teiles wurde bewiesen, dass in Figur 45 $\sphericalangle GCF$ grösser als ACG ist. Durch Trigonometrie bestimmt man erstern Winkel bei jeglicher Wiederholung der Figur mit beliebiger Längengrösse zu $21^0\,47'\,12\frac{1''}{2}$, letztern zu $19^0\,6'\,23\frac{3''}{4}$.

Auflösung. Dreiecke mit feststehenden Winkeln müssen auch gleiche Schnittwinkel entsprechender Geraden haben. So müssen in allen Dreiecken mit Winkeln von etwa 50°, 60°, 70° die Mittellinien sowohl mit den anliegenden Seiten als mit den Gegenseiten, also miteinander je gleichgrosse ähnlich liegende Winkel bilden. Oder wenn in mehreren gleichseitigen Dreiecken eine Seite in drei gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte mit der Gegenecke verbunden werden, so muss jedesmal sowohl der äussere als der innere Teilwinkel je die gleiche Grösse haben ($\sphericalangle ACG = A'C'G' = A''C''G'' \cdots = BCF = B'C'F' \cdots$ und $GCF = G'C'F' = G''C''F''$ u. s. w. in Figur 45).

Aufgabe 26. Welche Einschränkung muss der allgemeine Wortlaut des Satzes 9 erfahren?

Auflösung. Durch Festlegung zweier Seitenrichtungen eines Dreiecks ist schon eindeutig bestimmt der Winkel der zu diesen gehörigen beiden Höhen miteinander und mit jeder dieser beiden Seiten, ebenso der Winkel der Halbierungslinie des Winkels dieser beiden Seiten u. a. Folglich hat die Gleichheit des einen Winkels dieser zwei Seiten in zweierlei Dreiecken von selbst die Gleichheit der Winkel mehrerer Strecken zur notwendigen Folge, nämlich der Winkel zwischen den obengenannten Höhen, Winkelhalbierenden u. s. w.

Es muss daher dem Satze 9 die ausdrückliche Erklärung beigefügt werden, dass die drei Geraden solche Lage im Dreieck haben müssen, dass über die Winkel derselben keinerlei Vorbestimmung besteht, oder dass die drei Geraden in Bezug ihrer Winkel miteinander oder mit den Dreiecksseiten vollständig unabhängig sein müssen.

Erkl. 263. Gruppen von Dreiecksstücken, deren Winkelgleichheit zur Herbeiführung der Aehnlichkeit nicht genügt, wären nach nebenstehendem:

zwei Seiten und deren Winkelhalbierende,

zwei Seiten und die Höhe auf eine derselben,

eine Seite, deren zugehörige Höhe und irgend ein drittes Stück ···

Dagegen wären folgende Sätze ohne Einschränkung gültig:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die folgenden drei Linien des einen die entsprechenden Linien des andern je unter demselben Winkel treffen:

zwei Seiten und die Höhe zur dritten,

zwei Seiten und eine der beiden anderen Winkelhalbierenden,

eine Seite, eine nicht zugehörige Höhe und irgend ein drittes Stück,

die drei Höhen (oder die drei Mittellinien, Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten).

Erkl. 264. Ganz ähnliche Einschränkungen gelten auch für die Ergebnisse der Antwort der Frage 18, wie sich leicht nachweisen lässt.

Aufgabe 27. Man soll Fälle angeben, wo die Aehnlichkeit von Dreiecken daraus gefolgert wird, dass deren Seiten paarweise parallel oder senkrecht sind.

Auflösung. 1) Solche Fälle, wo Dreiecke mit einem ursprünglich gegebenen Dreieck ähnlich sind infolge der Parallelität ihrer Seiten, sind: die Dreiecke der Verbindungslinien der Seitenmitten, der Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte der drei Seiten in gleiche Anzahl von Teilen (siehe Erkl. 265), der Parallelen durch die Eckpunkte zu den Gegenseiten u. s. w.

2) Solche Fälle, wo Dreiecke mit einem ursprünglich gegebenen Dreieck ähnlich werden infolge senkrechter Lage ihrer Seiten, sind: das rechtwinklige Dreieck und seine durch die Höhe gebildeten Teildreiecke, die sämtlichen Dreiecke, welche entstehen durch fortlaufendes Zeichnen der Höhen in den aufeinanderfolgenden Teildreiecken eines gegebenen rechtwinkligen Dreiecks u. s. w. (siehe Figur 46 auf folgender Seite und Erkl. 266).

Erkl. 265. Sind die drei Seiten a, b, c des Dreiecks ABC je in drei gleiche Teile geteilt durch die Punkte $D_1 D_2$, $E_1 E_2$, $F_1 F_2$, so werden die Linien:

$$a \parallel E_1 F_2 \parallel E_2 F_1,$$
$$b \parallel F_1 D_2 \parallel F_2 D_1,$$
$$c \parallel D_1 E_2 \parallel D_2 E_1,$$

also entstehen eine ganze Menge neuer Dreiecke, nämlich 20 durch die Gruppierung je dreier dieser Schnittlinien miteinander oder mit den Seiten; und alle haben gleiche Winkel wegen der parallelen Seiten, sind also ähnlich.

Erkl. 266. Der zuletzt genannte Fall nebenstehender Auflösung gibt Anlass zu einer bemerkenswerten algebraischen Aufgabe: Sind a, b, c Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Figur 46), so sind ähnlich die Dreiecke der Linien:

$$abc \sim ch_1a \sim bh_2h_1 \sim ch_3h_2 \sim bh_4h_3 \sim ch_5h_4 \cdots,$$

also proportional:

$$b : c = h_1 : a = h_2 : h_1 = h_3 : h_2 = h_4 : h_3 = h_5 : h_4 \cdots$$

und folglich:

$$h_1 = \frac{b}{c}\cdot a,\ h_2 = \frac{b}{c}\cdot h_1 = \left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot a,\ h_3 = \frac{b}{c}\cdot h_2 = \left(\frac{b}{c}\right)^3\cdot a,\ h_4 = \frac{b}{c}\cdot h_3 = \left(\frac{b}{c}\right)^4\cdot a.$$

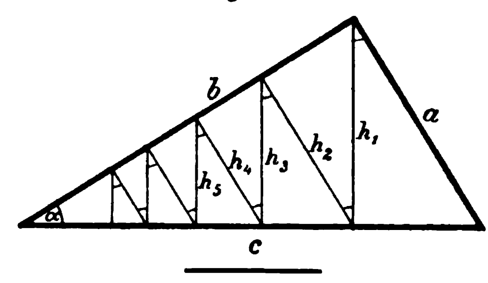
Daher entsteht bei Addition all dieser Höhen:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \cdots = a\left[\frac{b}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{a\cdot\frac{b}{c}}{1-\frac{b}{c}} = \frac{ab}{c-b} = \frac{b}{c-b}\cdot\sqrt{c^2-b^2}.$$

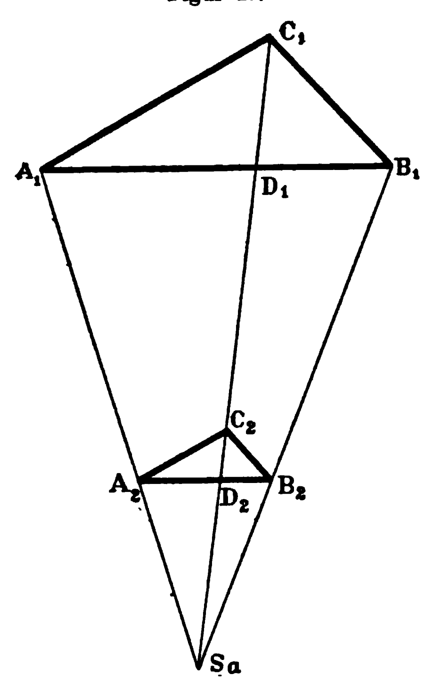
(Man vergleiche Kleyers Lehrbuch der geometrischen Progressionen.)

Figur 46.



Aufgabe 28. Man soll die in Erkl. 60 angedeutete Definition der Aehnlichkeit genau ausführen.

Figur 47.



Erkl. 267. In nebenstehender Auflösung ist gezeigt, dass Satz 1 dieses Teiles auch gilt

Auflösung. 1) Zu einem einmal gegebenen Dreieck $A_1B_1C_1$ entstehen lauter ähnliche Dreiecke dadurch, dass man von einem beliebigen Punkte S der Zeichenebene durch die Eckpunkte des Dreiecks Gerade zieht und auf diesen alle Teilpunkte nach gleichem Teilungsverhältnis bestimmt.

b) So sind die Strecken von S nach den Eckpunkten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ in Fig. 47 geteilt durch $A_2B_2C_2$ im Verhältnis 3 : 5, indem jede der Strecken SA_1, SB_1, SC_1 in 8 gleiche Teile geteilt und der dritte Teilpunkt als Eckpunkt für $A_2B_2C_2$ gewählt wurde, also:

$$SA_2 = \frac{3}{8}\cdot SA_1,$$

$$SB_2 = \frac{3}{8}\cdot SB_1,$$

$$SC_2 = \frac{3}{8}\cdot SC_1.$$

Dann muss aber nach Satz 3 des III. Teiles auch:

$$A_2B_2 = \frac{3}{8}\,A_1B_1,$$

$$B_2C_2 = \frac{3}{8}\,B_1C_1,$$

$$C_2A_2 = \frac{3}{8}\,C_1A_1$$

für die hier angenommene Bestimmung des Aehnlichkeitsbegriffs.

Sodann muss noch bewiesen werden, dass zwei Dreiecke in die so bestimmte Lage gebracht werden können, wenn die Voraussetzungen eines der drei Aehnlichkeitssätze erfüllt sind. Dies geschieht nach analogem Gedankengange, wie in Antwort der Frage 22.

Erkl. 268. Dreiecke können in diejenige Lage gebracht werden, dass die entsprechenden Seiten parallel sind und dass die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch einen Punkt gehen:

1) wenn die drei Seiten proportional sind. Zum Beweise legt man zwei entsprechende Seiten in parallele Lage, verbindet ihre Eckpunkte, etwa A_1A_2 und B_1B_2 und erhält Punkt S. Zieht man dann SC_1 und bestimmt darauf einen Punkt C'_2, für welchen $SC'_2 : SC_1 = SA_1 : SA_2$, so wird für das Dreieck $A_2B_2C_2'$ nach den mehrfach erwähnten Sätzen:

$$A_2B_2 : B_2C_2' : C_2'A_2 = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1.$$

Nach Voraussetzung ist aber auch:

$$A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1,$$

also muss auch:

$$B_2C_2' : C_2'A_2 = B_2C_2 : C_2A_2,$$

d. h. es muss:

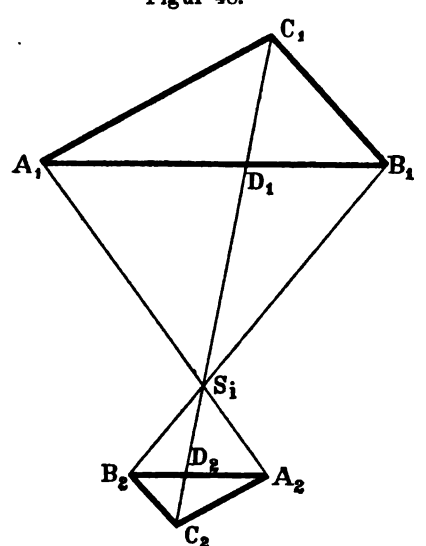
$$B_2C_2 = B_2C_2' \text{ und } C_2A_2 = C_2'A_2,$$

oder C_2' und C_2 müssen zusammenfallen. Folglich hat Dreieck $A_2B_2C_2$ ebenso wie das nur angenommene Dreieck $A_2B_2C_2'$ die verlangten Eigenschaften, dass:

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2, \quad B_1C_1 \parallel B_2C_2, \quad C_1A_1 \parallel C_2A_2,$$

sowie dass A_1A_2 und B_1B_2 und C_1C_2 durch S gehen. In analoger Weise erhält man die Beweise der drei anderen Aehnlichkeitssätze.

Figur 48.



sein, also:

$$A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2 = C_1A_1 : C_2A_2 = 5:3$$

oder:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2.$$

Und nach Satz 2a desselben VI. Teiles muss auch:

$$A_2B_2 \parallel A_1B_1, \quad B_2C_2 \parallel B_1C_1, \quad C_2A_2 \parallel C_1A_1$$

sein, also:

$$\sphericalangle \alpha_1 = \alpha_2, \quad \sphericalangle \beta_1 = \beta_2, \quad \sphericalangle \gamma_1 = \gamma_2.$$

3) In Figur 48 sind die drei Strecken SA_1, SB_1, SC_1 nicht innerlich, sondern äusserlich geteilt und zwar je im Verhältnis $2:7$, indem jede der Strecke SA_1, SB_1, SC_1 in 5 gleiche Teile geteilt und davon zwei Teilstrecken über S hinaus angetragen sind, um die Eckpunkte für A_2, B_2, C_2 zu erhalten; also:

$$SA_2 = \frac{2}{5} SA_1,$$

$$SB_2 = \frac{2}{5} SB_1,$$

$$SC_2 = \frac{2}{5} SC_1.$$

Dann muss aber auch nach Antwort auf Frage 24 des VI. Teiles:

$$A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2 = C_1A_1 : C_2A_2 = 5:2,$$

oder:

$$A_1B_1 : B_1C_1 : C_1A_1 = A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2,$$

und nach Satz 2a daselbst muss auch wieder:

$$A_2B_2 \parallel A_1B_1, \quad B_2C_2 \parallel B_1C_1, \quad C_2A_2 \parallel C_1A_1,$$

also:

$$\sphericalangle \alpha_1 = \alpha_2, \quad \sphericalangle \beta_1 = \beta_2, \quad \sphericalangle \gamma_1 = \gamma_2.$$

Aufgabe 29. Man soll die Unterschiede der Figuren 47 und 48 in Rücksicht der gleich- oder ungleichwendigen Aehnlichkeit beobachten.

Auflösung. Die Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in Figur 47 und 48 ist jedesmal gleichwendige. Ueberhaupt liefert die in voriger Aufgabe zu Grunde gelegte Definition der Aehnlichkeit (wenn man nicht ausdrücklich die Umklappung der Figuren hinzunimmt) nur die gleichlaufende Aehnlichkeit. Sind dabei die Strecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch S äusserlich geteilt wie in Figur 47, so sind auch die entsprechenden Strecken gleichlaufend parallel, indem die entsprechenden Punkte beider Figuren auf gleicher Seite von S liegen — sind aber die Strecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch S innerlich geteilt wie in Figur 48, so sind die entsprechenden Strecken ungleichlaufend parallel, indem die entsprechenden Punkte beider Figuren auf ungleicher Seite von S liegen.

Ungleichwendige Aehnlichkeit kann man sowohl in Figur 47 als 48 dadurch erhalten, dass man je eines der beiden Dreiecke umklappt. Dann gibt es aber (soviel man auch die Figur drehen mag) keinen Punkt S mehr, für welchen die Verbindungslinien entsprechender Punkte den gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Erkl. 269. Man hat wohl auseinander zu halten die beiden Unterscheidungen der gleichwendigen oder ungleichwendigen Aehnlichkeit ganzer Dreiecke oder der gleichlaufenden oder ungleichlaufenden Parallelität einzelner Strecken. Denn der Unterschied der Figuren 47 und 48 besteht nur in letzterem, während beidemale die Dreiecke ABC gleichwendig ähnlich sind. Und dieser in Figur 47 und 48 vorhandene Unterschied liegt eben darin, ob die entsprechenden Figurenteile im gleichen Winkel oder im Winkel und Scheitelwinkel am Aehnlichkeitspunkte gelegen sind.

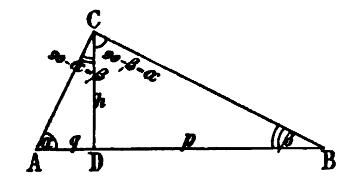
Erkl. 270. Wird A_1B_1 in Figur 47 und 48 von links nach rechts durchlaufen, so wird A_2B_2 in Figur 47 ebenfalls von links nach rechts, in Figur 48 dagegen von rechts nach links durchlaufen. Dann folgt im Punkte B_1 jedesmal Drehung um den $\sphericalangle \beta$ im positiven Sinne, also gegen den Uhrzeiger. Sodann wird wieder B_2C_2 in Figur 47 gleich B_1C_1, in Figur 48 entgegen B_1C_1 durchlaufen und sodann wieder jedesmal $\sphericalangle \gamma$ im positiven Drehungssinne. Entsprechend liegt auch Punkt D_2 in Figur 47 rechts von der Mitte von A_2B_2 in Fig. 48 links von der Mitte von A_2B_2, nämlich jedesmal näher an B_2 als an A_2.

Aufgabe 30. Man soll Beispiele für die gleichwendige und die ungleichwendige Aehnlichkeit anführen.

Auflösung. Ein naheliegendes Beispiel für beide Fälle liefert das rechtwinklige Dreieck und seine durch die Höhe bestimmten Teildreiecke. Während beim Umlauf ABC die Winkel mit positiver Drehung umlaufen werden, geschieht dies beim Dreieck ACD in entgegengesetzter Richtung. Es sind also $ABC \backsim ACD$ und $ABC \backsim CBD$ ungleichwendig ähnliche Paare, $ACD \backsim CBD$ dagegen ein gleichwendig ähnliches Paar.



Figur 49.



Erkl. 271. Nimmt man Dreieck ACD für sich von der Figur des Dreiecks ABC weg, so kann nie ein Punkt S für diese Dreiecke gefunden werden, ohne dass man eines der Dreiecke umklappt. Nimmt man dagegen die Dreiecke ACD und CBD auseinander und dreht das eine der beiden um 90°, so dass etwa ihre Hypotenusen parallel werden, so hat man unmittelbar die perspektivische Lage: entweder nach Figur 47 oder nach Figur 48, je nachdem die Drehung um 90° in positivem oder negativem Umdrehungssinne ausgeführt wurde.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 31. Man soll den zweiten Satz in Erkl. 38 unmittelbar beweisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 16.

Aufgabe 32. Aufgabe 17 soll für einen ausserhalb des Dreiecks liegenden Punkt P gelöst werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 17.

Aufgabe 33. Zu einem gegebenen Dreieck ein ähnliches zu konstruieren, dessen Umfang gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 18.

Aufgabe 34. Man soll die Proportionalität der Radien der Um-, In- und Ankreise ähnlicher Dreiecke beweisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 19.

Aufgabe 35. Man soll Figur 43 für andere Winkelgrössen herstellen und untersuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 20.

Aufgabe 36. Die Proportionalität der Umfänge der Teildreiecke in Figur 43 zu beweisen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 20.

Aufgabe 37. Man soll Aehnlichkeitsbedingungen anderer Art, als in den vier Aehnlichkeitssätzen aufstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 21.

Aufgabe 38. Ein Dreieck zu konstruieren aus $\sphericalangle \alpha$, $m:c$ und einer beliebigen Höhe.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 23.

Aufgabe 39. Wie ändert sich Fläche (Länge) bei Aenderung der Länge (Fläche) im Verhältnis $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ u. s. w.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 24.

Aufgabe 40. Zu Aufgabe 25 sollen weitere Beispiele aufgestellt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 25.

Aufgabe 41. Zu Erkl. 263 ebenfalls weitere Beispiele aufzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 26 und Erkl. 263.

Aufgabe 42. Wo fand sich früher Aehnlichkeit von Dreiecken infolge gleicher Winkel oder Seiten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 27.

Aufgabe 43. Dieselbe Aufgabe für parallele oder senkrechte Seiten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 27.

Aufgabe 44. Wieviele Paare ähnlicher Dreiecke gibt es in Figur 46.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 27.

Aufgabe 45. Man soll die übrigen drei Aehnlichkeitssätze beweisen wie in Aufgabe 28.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 28.

Aufgabe 46. Wo fanden sich Beispiele gleich- und ungleichwendig ähnlicher Dreiecke?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 29 und 30.

---

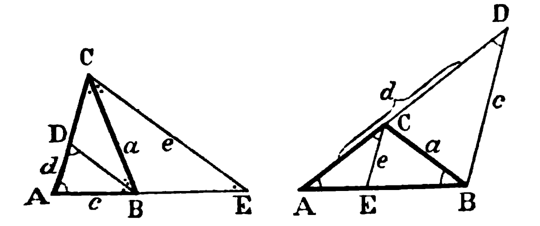
3) Aufgaben über die Anwendung der Aehnlichkeit auf die besonderen Dreiecke.

(Zu Abschnitt 3.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 47. Man soll unter Benützung der Antwort der Frage 26 ein Quadrat von Seite c in ein Rechteck verwandeln, von dem eine Seite a gegeben ist.

Figur 50.



Auflösung. Man nehme die Quadratseite c als Basis und die Rechtecksseite a $\left(> \frac{1}{2} c\right)$ als Schenkel im gleichschenkligen Dreieck (siehe Figur 50) und trage den Scheitelwinkel C dieses Dreiecks in einer der Basisecken B von der Grundseite an. Dann wird durch diesen neuen Winkelschenkel auf dem gegenüberliegenden Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks eine Strecke AD abgeschnitten, welche gleich der gesuchten zweiten Seite des verlangten Rechtecks ist. Denn wegen gleicher Winkel werden $ABC \sim DAB$, also $AB:BC = DA:AB$ oder

Erkl. 272. Statt den Winkel C in B anzutragen, konnte man auch den Winkel B in C antragen. So entsteht Dreieck $ACE \sim BAC$, $AC:CE = BA:AC$, $\overline{AC}^2 = AB \cdot CE$ oder $a^2 = c \cdot e$. Dabei ist aber a Schenkel und c Basis des Dreiecks.

$\overline{AB}^2 = BC \cdot DA$, also ist $AD = d$ die Rechtecksseite, für welche $c^2 = a \cdot d$.

Aufgabe 48. Nach derselben Methode umgekehrt ein Rechteck $a \cdot d$ in ein Quadrat c^2 zu verwandeln.

Erkl. 273. Statt auf der kleineren Seite $d = AD$ (siehe Figur 50, I) die Senkrechte zu errichten, kann man dies auch auf der grössern Seite $d = AD$ in Figur 50, II thun. Dann ist auf dieser Senkrechten der Punkt B zu suchen, dessen Abstand von C gleich $AC = a$ ist. Wieder wird (siehe Figur 50, II) $\sphericalangle CAB = CBA$ und $= CDB$, also $\triangle ABC \sim DAB$, $a:c = c:d$, $c^2 = a \cdot d$.

Auflösung. Man lege die Seiten des Quadrats aufeinander, errichtet auf der kleinen die Mittelsenkrechte und suche auf derselben den Punkt B, deren Abstand von C gleich $AC = a$ ist. Dann ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck, ebenso aber auch ABD wegen der Mittelsenkrechten, folglich $\sphericalangle CAB$ einerseits gleich CBA, andererseits gleich ADC. Demnach $\triangle ABC \sim DAB$, also $AB:BC = DA:AB$, $\overline{AB}^2 = BC \cdot DA$ oder $c^2 = a \cdot d$.

Aufgabe 49. Welche merkwürdige Beziehung besteht zwischen den Grössen a, c, d, e in Figur 50, I.

Erkl. 274. Das Eigentümliche der nebenstehenden Beziehung liegt darin, dass $a^2 + c^2$ die Summe zweier Quadrate ist und gleich wird der Summe zweier Rechtecke $ad + ce$, deren jedes eine der Quadratseiten beibehält. Um was also $d \gtrless a$ ist, wird $a \cdot d \gtrless a^2$, und um ebensoviel war also auch umgekehrt $ce \lessgtr c^2$, also $e \lessgtr c$. Und obendrein ist ja auch nach Vorherigem $a^2 = c \cdot e$ und $c^2 = a \cdot d$.

Erkl. 275. Die Aufstellung der erstern Beziehung $a:(a-d) = e:(e-c)$ führt zu der selbstverständlichen Beziehung der Parallelstrecken c und e, dass $c:e = d:a$.

Auflösung. Die Teildreiecke BDC und CBE in Figur 50, I und II haben gleichgrosse Winkel. Denn wegen der Antiparallelen ist $\sphericalangle DCB = BEC$, und $\sphericalangle CDB = \sphericalangle EBC$ und ausserdem auch als innerer Wechselwinkel:

$$\sphericalangle CBD = ECB.$$

Folglich ist:

$$\sphericalangle CBD \sim ECB,$$

also:

$$CB:BD:DC = EC:CB:BE$$

oder:

$$a:c:(a-d) = e:a:(e-c).$$

Daraus folgt einzeln:

$$c:(a-d) = a:(e-c)$$

oder:

$$c(e-c) = a(a-d),$$
$$ce - c^2 = a^2 - ad,$$
$$a^2 + c^2 = a \cdot d + c \cdot e$$

Aufgabe 50. Inwiefern stellt sich Fig. 8 als besonderer Fall der Figur 50 dar?

Erkl. 276. Auch die Proportionen zwischen den Strecken a, c, d, e gehen für die Figur 8 in die beim Zehneck bestehenden Beziehungen über: denn $c^2 = a \cdot d$, (wobei $c = AB = BD = DC = AC - AD$) gibt unmittelbar:

$c^2 = a(a-c)$, d. h. die Beziehung des goldenen Schnittes. Ebenso wird identisch:

$a^2 + c^2 = ad + ce$, wenn diese Einsetzung stattfindet.

Auflösung. Sind α und γ in Figur 50 die Winkel bei A und C, so ist in Figur 50 I:

$$\sphericalangle \alpha = 90 - \frac{\gamma}{2},$$

$$\sphericalangle CBD = \alpha - \gamma = 90 - \frac{3\gamma}{2} = \frac{3}{2}(60 - \gamma)$$

und

$$\sphericalangle CDB = 180 - \alpha = \alpha + \gamma = 90 + \frac{\gamma}{2}.$$

In Figur 50, II ist:

$$\sphericalangle CBD = 180 - 3\alpha,$$

dann:

$$\sphericalangle ABD = 180 - 2\alpha,$$

also bleibt nach Abzug von ABC:

$$180 - 3\alpha = 180 - 3\left(90 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{3\gamma}{2} - 90$$

$$= \frac{3}{2}(\gamma - 60)$$

und

$$\sphericalangle CDB = \alpha = 90 - \frac{\gamma}{2}.$$

Dieses Dreieck CDB nun wird in Figur 8 fürs Zehneck gleichschenklig, indem dann:

$$\sphericalangle BCD = DBC,$$

also:

$$\gamma = \frac{3}{2}(60 - \gamma),$$

$$2\gamma = 180 - 3\gamma,$$

$$\gamma = \frac{180}{5} = 36^0.$$

Erkl. 277. Aus nebenstehenden Formeln für die Winkel des Dreiecks BCD geht auch wieder hervor, dass $\gamma = 60^0$ einen Ausnahmefall bildet, indem dann das Dreieck ganz verschwindet. Die Antiparallele fällt mit der Seite BC zusammen: $\gamma < 60$ lässt Figur I, $\gamma > 60$ Figur II entstehen.

Aufgabe 51. Man soll den Einfluss der Bezeichnung „gleichschenklig" auf die Aehnlichkeit der Dreiecke einzeln darlegen.

Auflösung. 1) Die zur Aehnlichkeit in beliebiger Zusammenfassung zu irgend zweien erforderlichen Elemente sind die, dass entweder:

a) ein Winkel des einen Dreiecks, oder:

b) ein Seitenverhältnis innerhalb des einen Dreiecks denselben Wert habe, wie ein Winkel des andern Dreiecks oder ein Seitenverhältnis des andern Dreiecks.

2) Mit der Bezeichnung „gleichschenklig" ist nun die Gleichheit zweier Winkel im gleichen Dreieck angegeben, nicht aber die Gleichheit eines Winkels des einen Dreiecks mit einem Winkel des andern. Daher ist durch die Bezeichnung „gleichschenklig" nicht das erste, sondern das zweite der oben genannten Elemente geliefert; sowie nämlich ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist das Verhältnis der Schenkel im einen Dreieck etwa $a:a = 1$, im andern $a':a' = 1$, also jedesmal gleichgross gleich 1.

3) Andererseits liefert die Bezeichnung eines Dreiecks als „gleichschenklig" eine Rückführung der Winkelgrössen auf einen einzigen unabhängigen Winkel. Nicht die erste Winkelgrösse ist festgelegt, wohl aber die Beziehung der anderen Winkel zum ersten. Denn zu gegebenem α gehört bloss $\gamma = 180^0 - 2\alpha$ oder zu gegebenem γ bloss $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$. Und ebenso in jedem zweiten gleichschenkligen Dreieck zu α' nur $\gamma' = 180 - 2\alpha'$ bezw. zu γ' bloss $\alpha' = 90 - \frac{\gamma'}{2}$.

Erkl. 278. Die nebenstehende Ausführung liefert eine Begründung dafür, dass zur Namengebung eines Dreiecks mit zwei gleichen Winkeln nicht etwa die Namen gleichwinklig oder gleichgeneigt zu allgemeinem Gebrauch gelangt sind, sondern der Name gleichschenklig. Denn die Beziehung der gleichen Seitenlängen ist die massgebende, und in geringerem Mass erst jene der gleichen Winkel.

Erkl. 279. In der Festsetzung der Seitengleichheit liegt allerdings auch eine gewisse Bindung der Winkelbeziehungen, aber erst in zweiter Linie. Sobald $a = b$ und $a' = b'$ bekannt ist, weiss man, dass $a:b = 1$ und $a':b' = 1$, also $a:b = a':b'$, ganz ohne dass etwa $a = a'$ oder $b = b'$ sein müste. Dagegen:

$$\gamma = 2(90 - \alpha) \text{ und } \gamma' = 2(90 - \alpha')$$

bildet zwar auch eine analoge Festlegung, liefert aber keine besondere Folge weder für $\gamma:\gamma'$ noch $\gamma - \gamma'$, sondern nur dann, wenn auch etwa $\gamma = \gamma'$. Daraus allerdings folgt auch $\alpha = \alpha'$ und umgekehrt.

Aufgabe 52. Dieselbe Ueberlegung für das rechtwinklige Dreieck durchzuführen.

Erkl. 280. Man liest oft den Namen „pythagoreische Dreiecke“ für solche, in welchen $c^2 = a^2 + b^2$. Aus nebenstehendem geht aber hervor, dass in allen Rücksichten der Aehnlichkeit die Bezeichnung als „rechtwinklig“ das wesentlichere Moment enthält, während die Längenbeziehung eine untergeordnete bleibt.

Erkl. 281. In der Festsetzung der Rechtwinkligkeit liegt allerdings auch eine gewisse Bindung der Seitenverhältnisse, aber erst in zweiter Linie. Sobald $\gamma = 90$ und $\gamma' = 90$, ist eben $\gamma = \gamma'$. Aber:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

ist zwar eine analoge Festlegung, liefert aber keine besondere Folge etwa für $c : c'$, sondern nur dann, wenn etwa $a : b = a' : b'$. Dann allerdings folgt sofort auch:

$$a' : c' = a' : \sqrt{a'^2 + b'^2} = a : \sqrt{a^2 + b^2} = a : c$$

und allgemein:

$$\begin{aligned} a : b : c &= a : b : \sqrt{a^2 + b^2} = a : \sqrt{c^2 - a^2} : c \\ &= \sqrt{c^2 - b^2} : b : c = a' : b' : c' \\ &= a' : c' : \sqrt{a'^2 + b'^2} = a : \sqrt{c'^2 - a'^2} : c' \\ &= \sqrt{c'^2 - b'^2} : b' : c'. \end{aligned}$$

Auflösung. 1) Mit der Benennung „rechtwinklig“ ist die wirkliche Grösse eines Winkels γ bestimmt und dadurch das zweite der oben angegebenen Elemente für die Aehnlichkeit festgelegt, nämlich $\gamma = \gamma' = 90^0$.

2) Andererseits liefert die Bezeichnung eines Dreiecks als rechtwinklig eine Rückführung der Seitenverhältnisse auf ein einziges, unabhängiges Verhältnis. Nicht der erste Verhältniswert ist festgelegt, wohl aber die Beziehung der anderen Verhältnisse zum ersten. Denn zu gegebenem Verhältnis $a : b$ gehört bloss:

$$a : c = a : \sqrt{a^2 + b^2}$$

oder zu gegebenem $a : c$ bloss:

$$a : b = a : \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Und ebenso in jedem zweiten rechtwinkligen Dreieck zu $a' : b'$ nur:

$$a' : c' = a' : \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

bezw. zu $a' : c'$ nur:

$$a' : b' = a' : \sqrt{c'^2 - a'^2}.$$

Aufgabe 53. Welche Betrachtung allgemeiner Natur ergibt sich aus den beiden vorigen Aufgaben?

Erkl. 282. Im weitern Verfolg nebenstehender Ueberlegung gelangt man zu dem Schluss, dass überhaupt nicht die Grösse, sondern vielmehr die Gestalt eines Dreiecks das Wesentlichste zu dessen Beurteilung ist. Damit stimmt überein, dass nach Bestimmung der Gestalt (durch zwei der Elemente Winkel oder Seitenverhältnis) bloss noch eine einzige Längengrösse zur Festlegung der Grösse nötig ist. Dagegen wären nach Bestimmung des Flächeninhaltes noch mindestens zwei Angaben nötig, um auch die Gestalt festzulegen.

Erkl. 283. Auch die Kongruenzbetrachtungen bilden keinen Widerspruch, sondern vielmehr eine Bestätigung des vorigen. Denn während die Aehnlichkeitsbedingungen genau symmetrisch sind in Seitenverhältnissen und Winkeln, bleibt bei den Kongruenzbedingungen die Asymmetrie, dass Gleichheit 1) dreier Seiten, 2) zweier Seiten und eines Winkels, 3) einer Seite und zweier Winkel — nicht aber 4) der drei Winkel als Bedingung erscheinen kann.

Auflösung. Aus den beiden vorigen Aufgaben ergibt sich, dass nicht Winkel und Seiten die gleichwertigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks sind, sondern Winkel und Seitenverhältnisse. Denn zwischen diesen Grössen besteht vollkommne Analogie:

Die drei Winkel α, β, γ: durch die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ derartig verknüpft, dass von den drei Winkeln nur zwei unabhängig sind.

Die drei Seitenverhältnisse:

$$\frac{a}{b}, \; \frac{b}{c}, \; \frac{c}{a}$$

durch die Beziehung:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

derartig verknüpft, dass von den drei Verhältnissen nur zwei unabhängig sind. Und zur Herbeiführung der Aehnlichkeit bedarf es der Gleichheit — entweder:

1) zweier Winkelpaare, oder

2) eines Winkelpaares und eines Paares Seitenverhältnisse, oder

3) zweier Paare von Seitenverhältnissen.

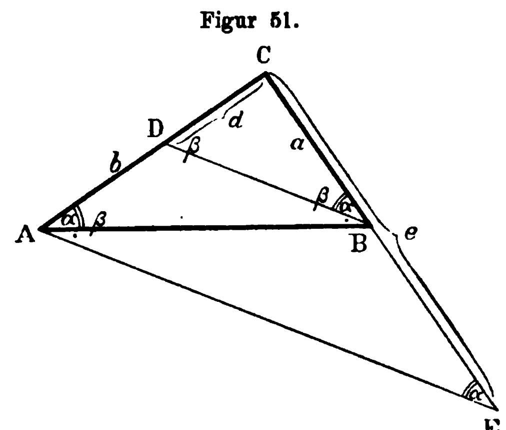
Aufgabe 54. Man soll unter Benutzung der ersten Antwort der Frage 30 ein Quadrat von Seite a in ein Rechteck verwandeln, von dem eine Seite b gegeben ist.

Auflösung. Man zeichne aus Quadratseite a und Rechteckseite b als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck, und trage den an der letztern Kathete (der Rechteckseite) entstehenden spitzen Winkel an der erstern Kathete (der Quadratseite) an. Dadurch wird auf der von der gegebenen Rechteckseite gebildeten Kathete eine Strecke abgeschnitten, welche gleich der verlangten zweiten Rechteckseite ist.

Erkl. 284. Die gegebene Rechteckseite kann die grössere oder kleinere sein: beide Fälle werden im nebenstehenden gleichmässig angegeben. In Figur 51 ist der erstere gegeben durch Konstruktion von d aus $a^2 = b \cdot d$, der letztere durch Konstruktion von e aus $b^2 = e \cdot a$.

Erkl. 285. Die Konstruktion der mittlern Proportionale a zu b und d (wie in Aufgabe 48 mittels des gleichschenkligen Dreiecks möglich gewesen) ist unter Benützung vorliegender Figur nicht zu bewerkstelligen. Denn man kann nicht ohne Anwendung weiterer Hilfsmittel auf dem Schenkel CE denjenigen Punkt B finden, für welchen die Verbindungslinien DB und BA die gleichgrossen Winkel DBC und BAC liefern.

Figur 51.



Aufgabe 55. Dieselbe Aufgabe mittels der zweiten Antwort der Frage 30 zu lösen.

Figur 52.

Auflösung. 1) Man zeichne aus Quadratseite a als Hypotenuse und Rechteckseite p als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck BCD (siehe Figur 52) und ziehe $b \perp a$, so erhält man:

$$BA = c = \frac{a^2}{p}.$$

2) Man zeichne aus Quadratseite a als Kathete und Rechteckseite c als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck ABC und fälle die Höhe h, so erhält man:

$$BC = p = \frac{a^2}{c}.$$

3) Man zeichne aus Quadratseite h und Rechteckseite p als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck BCD und zeichne $b \perp a$, so erhält man:

$$AC = q = \frac{h^2}{p}.$$

4) Man zeichne aus Quadratseite a und Rechteckseite b als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck ABC, und errichte im Endpunkt der Quadratseite die Senkrechte auf der Hypotenuse, dann erhält man auf der andern Kathete die Strecke:

$$CE = r - b = \frac{a^2}{b}$$

Erkl. 286. Von den nebenstehenden Auflösungsarten dieser Aufgabe sind die drei ersten bereits von früher her bekannt, hier aber der Uebersicht wegen mit den anderen zusammengestellt.

In den Auflösungen 1), 5), 6) muss immer die Quadratseite grösser sein als die gegebene Rechteckseite, in Auflösung 2) muss die Quadratseite kleiner sein als die gegebene Rechteckseite, in den beiden anderen, 3) und 4) bleibt es ausser Rücksicht, welche Grössenbeziehung besteht, da diese beiden Lösungen für beiderlei Fälle anwendbar sind.

Die Lösungen 1) und 2) sind zusammengehörige Beispiele derselben Auflösung für die beiden Fälle, dass die Quadratseite grösser oder kleiner ist als die Rechteckseite.

Erkl. 287. Die Formeln zu den nebenstehenden Auflösungen sind die in Antwort der Frage 31 aufgestellten, und zwar zur ersten und zweiten Lösung Formel:

$$1)\ a^2 = c \cdot p \text{ oder auch } 2)\ b^2 = c \cdot q;$$

zur dritten Lösung Formel:

$$3)\ h^2 = p \cdot q;$$

zur vierten, fünften, sechsten die Formeln 4), 5), 7).

Eine Konstruktion auf Grund einer andern Formel fällt je mit einer der bisherigen zusammen, z. B. die nach Formel 6) mit der ersten oder zweiten Lösung, indem k Quadratseite und entweder r oder $r - h$ Rechteckseiten sind.

oder die Strecke:

$$CE' = r' = \frac{b^2}{a}.$$

5) Man zeichne aus Quadratseite c als Hypotenuse und Rechteckseite b als Kathete das rechtwinklige Dreieck ABC und errichte im Endpunkt der andern Kathete die Senkrechte auf die Hypotenuse; dann erhält man auf der ersten Kathete das Stück:

$$CA = r = \frac{c^2}{b} \left(\text{bezw. } BE' = r' + a = \frac{c^2}{a}\right).$$

6) Man zeichne aus Quadratseite a als Hypotenuse und Rechteckseite h als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck BCD, ziehe durch B die Parallele zu h und in C die Senkrechte auf a; dann erhält man:

$$BE = k = \frac{a^2}{h}.$$

Aufgabe 56. Das Verhältnis zweier Quadrate als Verhältnis zweier Strecken darzustellen?

Auflösung. 1) Man zeichne aus den beiden Quadratseiten als Katheten das rechtwinklige Dreieck ABC und fälle die Höhe h, dann sind p und q zwei Strecken, die sich verhalten wie $a^2 : b^2$, dann:

$$a^2 = c \cdot p,$$
$$b^2 = c \cdot q,$$

folglich:

$$a^2 : b^2 = p : q.$$

2) Man zeichne in demselben rechtwinkligen Dreieck ABC, dessen Katheten die Quadratseiten sind, die Parallelen k und k' durch A und B. Dann ist:

$$a^2 = h \cdot k,$$
$$b^2 = h \cdot k',$$

also:

$$a^2 : b^2 = k : k'.$$

Erkl. 288. Die beiden nebenstehenden Lösungen entsprechen den beiden Formeln $a^2 = p \cdot c$ in Antwort der Frage 31 und $a^2 = h \cdot k$ in Erkl. 79.

Der früher bekannte Weg zur Lösung dieser Aufgabe war der, jedes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln mit einer gleichgrossen Seite.

Auch konnte man a und b als senkrechte Halbsehnen desselben Kreises zeichnen und die zugehörige Sehne suchen.

Aufgabe 57. Man soll aus einer durch eine Strecke dargestellten Grösse die Quadratwurzel konstruieren.

Auflösung. Man macht $p = z$, $q = 1$. Dann erhält man durch den Halbkreis über c die Höhe h, für welche:

$$h^2 = p \cdot q = z,$$

also:

$$h = \sqrt{z}.$$

Erkl. 289. Sowie Masse auftreten, muss auch irgend eine Strecke als Längeneinheit aufgestellt sein, und hier angewandt werden.

Aufgabe 58. Man soll die Ueberlegungen der Aufgaben 51 und 52 auch für das gleichschenklig rechtwinklige und für das gleichseitige Dreieck durchführen.

Erkl. 290. Je nachdem man beim gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck sich eine Gruppe seiner Eigenschaften zunächst in Erinnerung bringt, erhält man Aehnlichkeit nach einem der vier Sätze, nämlich nach dem I., wenn man an das feststehende Seitenverhältnis:

$$1:2:\sqrt{2}$$

denkt; nach dem II, wenn man bedenkt, dass der rechte Winkel von gleichgrossen Schenkeln eingeschlossen wird; nach dem III. durch das Verhältnis $1:\sqrt{2}$ zwischen einer Kathete und der stets einem rechten Winkel gegenüberliegenden Hypotenuse, und nach dem IV. durch die feststehenden Werte der Winkel 45, 45, 90°.

Erkl. 291. Beim gleichseitigen Dreieck entsteht die Aehnlichkeit nach dem II. Aehnlichkeitssatze, wenn zunächst ins Auge gefasst wird, dass die die drei feststehenden Winkel von 60° einschliessenden Schenkel gleiche Länge haben. Der III. Satz tritt nicht in Wirksamkeit, da bei Gleichheit aller drei Seiten an eine „grössere“ eigentlich nicht gedacht werden kann.

Auflösung. 1) Die Bezeichnung eines Dreiecks als gleichschenklig rechtwinklig enthält je eines der beiderlei Elemente der Aehnlichkeit, nämlich der erstere Teil die Bestimmung eines Seitenverhältnisses, der zweite die Bestimmung eines Winkels. Der Wert dieser beiden Elemente ist in sämtlichen gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken derselbe, nämlich ersterer = 1, letzterer = 90; also sind alle Dreiecke dieser Art ähnlich.

2) Die Bezeichnung eines Dreiecks als gleichseitig lässt sich doppelt auffassen. Wörtlich genommen enthält sie die Bestimmung zweier Seitenverhältnisse, nämlich:

$$a:b = 1:1, \quad a:c = 1:1.$$

Und da diese beiden Verhältnisse in allen gleichseitigen Dreiecken denselben Wert haben, so sind diese alle ähnlich (nach dem I. Aehnlichkeitssatz). — Denkt man aber bei der Bezeichnung als gleichseitig zunächst an die daraus folgende Gleichheit der drei Winkel, so erhält man die Bestimmung der drei Winkelgrössen von 60° als gemeinsame Eigenschaft aller gleichseitigen Dreiecke, und damit Aehnlichkeit nach dem IV. Aehnlichkeitssatz.

Aufgabe 59. Man nehme die Seite a eines gegebenen Quadrats

1) als Kathete,

2) als Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks,

3) als Seite,

4) als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks.

Welche Grösse erhalten die Quadrate, als deren Seite gewählt wird:

1) die Hypotenuse,

2) die Kathete,

3) die Höhe,

4) die Seite der neuen Dreiecke?

Erkl. 292. Im ersten und zweiten Falle kann statt x oder y auch gesetzt werden die ganze oder halbe Diagonale des Quadrats a^2. Denn da:

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

so ist:

$$e = a\sqrt{2},$$

$$\frac{e}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ und } e^2 = 2a^2,$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{1}{2}a^2.$$

Auflösung. Bezeichnet man je die neuentstehende Strecke als x, y, u, v, so ist:

$$a:x = 1:\sqrt{2}, \qquad a:y = \sqrt{2}:1,$$

$$x = a\sqrt{2}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$x^2 = 2\cdot a^2, \qquad y^2 = \frac{1}{2}a^2,$$

$$a:u = 1:\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad a:v = \frac{1}{2}\sqrt{3}:1,$$

$$u = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \qquad v = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

$$u^2 = \frac{3}{4}a^2, \qquad v^2 = \frac{4}{3}a^2.$$

Also sind die neu entstehenden Quadrate 1) zweimal so gross, 2) zweimal so klein, 3) um ein Viertel kleiner, 4) um ein Drittel grösser als das gegebene.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 60. Die Determination der Einzelfälle von Aufgabe 47 aufzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 47.

Aufgabe 61. Ein Rechteck $c \cdot e$ in ein Quadrat a^2 zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 48.

Aufgabe 62. Auf einfachste Weise zwei Rechtecke herzustellen, deren eines ebensoviel grösser, wie das andere kleiner ist als zwei gegebene Quadrate a^2 und c^2.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 49.

Aufgabe 63. Wie hängt die Winkelgrösse im gleichschenkligen Dreieck von der Grösse der Seiten ab.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 51.

Aufgabe 64. Zahlenbeispiele für die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck aufzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 52.

Aufgabe 65. Die ähnlichen Dreiecke der Figur 52 in Rücksicht der Aufgaben 29, 30 und 46 zu vergleichen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 30 und 55.

Aufgabe 66. Für die Figur 52 ganzzahlige Streckenlängen aufzusuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 55.

Aufgabe 67. An vorigem Zahlenbeispiel die Gleichungen der Erkl. 80 zu bestätigen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 65, 66 und Erkl. 80.

Aufgabe 68. Für ein gegebenes Quadrat eine Reihe inhaltsgleicher Rechtecke herzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 54 und 55.

Aufgabe 69. Das Verhältnis zweier Strecken als Verhältnis zweier Quadratflächen darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56.

Aufgabe 70. Eine Strecke m mit $\frac{x^2}{y^2}$ zu multiplizieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 56.

Aufgabe 71. Eine Strecke m mit $\sqrt{\frac{x}{y}}$ zu multiplizieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 56 und 69.

Aufgabe 72. Aufgabe 57 nach anderer Methode zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 57 und Antwort der Frage 31, 1) u. 2).

Aufgabe 73. Ein Quadrat herzustellen von doppelter bezw. halber Grösse eines gegebenen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 59.

Aufgabe 74. Wie verhält sich ein gleichseitiges Dreieck zu dem, welches seine Höhe als Seite hat?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 59.

---

4) Aufgaben über die Anwendung der Aehnlichkeit auf das Viereck, sowie das allgemeine Vieleck.

(Zu Abschnitt 4 und 5.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die vier Teilwinkel der einen Diagonale mit den anstossenden Seiten, sowie die Länge der zweiten Diagonale gegeben ist.

Erkl. 298. Die beiden Vierecke, um welche es sich im nebenstehenden handelt, sind das gesuchte und das vorläufig konstruierte. Bezeichnet man dieselben mit Zeigern 1 und 2, so ist zunächst:

$$\sphericalangle CAB_1 = CAB_2 \text{ und } ACB_1 = ACB_2$$

also auch:

$$AC_2 = x \cdot AC_1,\ AB_2 = x \cdot AB_1,\ BC_2 = x \cdot BC_1.$$

Ferner:

$$\sphericalangle CAD_1 = CAD_2,\quad ACD_1 = ACD_2,$$

also auch wieder:

$$AC_2 = x \cdot AC_1,\ AD_2 = x \cdot AD_1,\ CD_2 = x \cdot CD_1.$$

Fasst man jetzt zusammen die Dreiecke BAD bezw. BCD, so ist:

$$AB_2 = x AB_1,\ AD_2 = x AD_1,\ \sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_1,$$

Auflösung. Sind die gegebenen Stücke α', α'', γ' und γ'' sowie Diagonale f, so kann man zunächst an beliebiger Strecke AC die Winkel α', α'', γ', γ'' antragen und erhält dadurch ein Viereck, welches dem gesuchten ähnlich sein muss, wegen Gleichheit sämtlicher Winkel zwischen der Diagonale e und den Seiten. Denn es sind ähnlich die Paare der Teildreiecke ACB und ACD, wegen Gleichheit der Winkel. Infolge dessen sind in denselben Teildreiecken auch proportional die Seiten AB, AD, sowie CB, CD; also sind auch ähnlich die Dreiecke ABD bezw. CBD; folglich auch gleichgross die Winkel an der Diagonale f. Legt man daher die beiden Vierecke aufeinander, so werden die Diagonalen f parallel. Daher hat man bloss in dem vorläufig gefundenen Viereck $ABCD$ die gegebene Strecke parallel BD eingetragen

also:

$$\sphericalangle DAB_2 \sim DAB_1, \quad \sphericalangle ABD_2 = ABD_1, \quad \sphericalangle ADB_2 = ADB_1,$$

daher $BD_2 \parallel BD_1$, wenn aufeinander gelegt wird.

im Winkel A oder C, so erhält man das gesuchte Viereck.

Erkl. 294. Als Figur zur vorstehenden Aufgabe kann jedes beliebige Viereck mit der allgemein üblichen Bezeichnung, wie früher, verwandt werden.

Aufgabe 76. Von einem Viereck seien gegeben drei Winkel, das Teilungsverhältnis des vierten durch die Diagonale und der Umfang. Dasselbe zu konstruieren.

Erkl. 295. Auch hier hat man sich zu hüten vor zu geringer oder zu grosser Anzahl der Bestimmungsstücke. Wenn z. B. gegeben sind ein Winkel und die Teilwinkel eines benachbarten, so ist damit auch das Verhältnis der Diagonale zu den beiden anstossenden Seiten sowie das dieser Seiten bestimmt. Man muss also bei der Auswahl von Bestimmungsstücken sehr darauf achten, dass man nicht eine Grösse festsetzt, die durch vorherige Stücke bereits bestimmt ist. Das würde entweder zu unmöglichen oder zu unbestimmten Aufgaben führen (ersteres, wenn ein unrichtiger, letzteres, wenn der richtige Wert des Stückes gegeben würde).

Auflösung. Durch die Winkel α, β, γ ist der vierte δ auch bestimmt. Soll derselbe durch die Diagonale f im Verhältnis $m:n$ geteilt werden, so sind seine Teilwinkel:

$$\frac{m}{m+n}\cdot\delta \text{ und } \frac{n}{m+n}\cdot\delta.$$

Dadurch sind auch die Teilwinkel von β bestimmt, nämlich:

$$180-\alpha-\frac{m}{m+n}\cdot\delta \text{ und } 180-\gamma-\frac{n}{m+n}\cdot\delta.$$

Demnach kann man vorläufig ein Viereck $ABCD$ konstruieren, mit Winkeln und Teilwinkeln des gesuchten. Misst man dessen Umfang u, vergleicht ihn mit dem gegebenen Umfang, so muss das Verhältnis x dieser Längen auch das Verhältnis x zwischen den Seiten des gesuchten und des vorläufig gefundenen Vierecks darstellen.

Die Teilung eines Winkels nach gegebenem Verhältnis geschieht entweder durch Rechnung (wenn nämlich der Winkel in Graden angegeben ist) oder durch Teilung eines vom Winkel begrenzten Kreisbogens um seinen Scheitel im verlangten Verhältnis.

Aufgabe 77. Man soll die Aehnlichkeit regulärer Vielecke von gleicher Seitenzahl im einzelnen nachweisen.

Erkl. 296. Man erkennt aus den vier Aehnlichkeitssätzen, dass die Gleichheiten der Seiten und Winkel im regulären Vieleck durchaus nicht ganz unabhängig von einander bestehen. Wenn vielmehr:

1) $n-1$ Seiten gleich und die $n-2$ von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, oder

2) $n-2$ aneinander stossende Seiten gleich und alle Winkel gleich, oder

3) alle n Seiten gleich und $n-3$ aufeinander folgende Winkel gleich, oder

4) $n-1$ Seiten gleich und $n-2$ aufeinander folgenden Winkel gleich sind,

so müssen jedesmal die übriggebliebenen Seiten bezw. Winkel auch gleich sein, also muss das Vieleck bei Erfüllung jeder einzelnen dieser vier Bedingungsgruppen ein regelmässiges sein.

Auflösung. Im regelmässigen n-Eck ist jeder Winkel gleich:

$$\frac{2n-4}{n}\text{ Rechte} = 180^0 - \frac{360^0}{n},$$

und alle Seiten sind einander gleich; also sind alle vier Aehnlichkeitssätze erfüllt: Die Seiten im einzelnen Vieleck bilden alle dieselbe Proportion $1:1:1\cdots$, oder zwischen beiden Vielecken:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\cdots,$$

und die Winkel haben ohne Ausnahme gleiche Grösse, ob eingeschlossene oder gegenüberliegende, getrennte oder aufeinander folgende. Also kann man jede der vier Zusammenstellungen der Aehnlichkeitsbedingungen einzeln aufnehmen und deren Erfüllung nachweisen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, **sowie von** der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

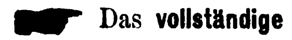
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis
der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

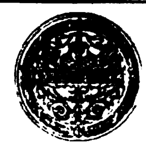
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1339. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1338. — Seite 113—128.
Mit 9 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1338. — Seite 113—128. Mit 9 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung [illegible]igt.

Die Verlagshandlung.

Aufgabe 78. Welche Aehnlichkeitsbedingungen ergeben sich für solche Vierecke, welche einem Kreise ein-, oder um-, oder ein- und umgeschrieben sind.

Auflösung. Sowie von zwei ähnlichen Vierecken das erste eine derartige Beziehung zu einem Kreise hat, muss auch das zweite mit derselben Beziehung einem Kreise zugeordnet sein. Und die Radien beider Kreise stehen in gleicher Proportion, wie zwei entsprechende Längen beider Vierecke. Da nun beim Sehnen- und Tangentenviereck nur noch vier, beim Kreisviereck nur noch drei willkürliche Bestimmungsstücke für die Konstruktion bestehen, so erhält man die Aehnlichkeitsbedingungen dieser Figuren, indem man aus der Anzahl der Kongruenzbedingungen jeweils eine Längengrösse hinwegnimmt, bezw. zwei Längen durch ihr Verhältnis zu einander ersetzt. Dadurch erhält man:

Erkl. 297. Der Radius des Umkreises, bezw. des In- oder Ankreises tritt selbstverständlich als gleichwertige Länge auf, wie eine Seite des Vierecks. Beim Kreisviereck ist nach vollzogener Wahl der Winkelgrössen nur einer der beiden Radien willkürlich, da hiernach durch die Bedingungen der Figur selbst die Verhältnisgrösse der beiden Kreise bestimmt ist. Daher könnte nur dann das Verhältnis der beiden Radien als Aehnlichkeitsbedingung genommen werden, wie auch etwa das Verhältnis eines solchen Radius zu einer Seite, wenn diese Verhältnisgrösse an die Stelle eines Seitenverhältnisses einzutreten hätte.

Satz. Sehnenvierecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

1) im Verhältnis der vier Seiten,

2) im Verhältnis dreier Seiten und der Grösse eines Winkels,

3) im Verhältnis zweier Seiten und der Grösse zweier (also aller vier) Winkel.

Erkl. 298. Tritt zur Erfüllung der Aehnlichkeitsbedingungen noch die Gleichheit einer Länge, z. B. eines Kreisradius, so wird aus der Aehnlichkeit die Kongruenz. Man kann also einem gegebenen Kreise nicht zweierlei ähnliche Vierecke ein-, oder um-, bezw. anschreiben. Und umgekehrt müssten zwei Vierecke, welche demselben Kreise ein-, oder um-, bezw. angeschrieben wären, unbedingt auch kongruent sein, sowie ihre Aehnlichkeit nachgewiesen werden kann. Nur ihrer Lage nach könnten sie noch verschieden sein. Durch Drehung um den Kreismittelpunkt müssten dann aber bei Deckung eines einzigen entsprechenden Punktes (bei Deckung eines in beiden Vierecken entsprechenden Radius) sofort die beiden Figuren vollständig zur Deckung gelangen.

Satz. Tangentenvierecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

1) im Verhältnis dreier (also aller vier) Seiten und einer Winkelgrösse,

2) im Verhältnis zweier Seiten und zweier Winkelgrössen,

3) in der Grösse dreier (also aller vier) Winkel.

Satz. Kreisvierecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

1) im Verhältnis dreier (also aller vier) Seiten,

2) im Verhältnis zweier Seiten und der Grösse eines Winkels,

3) in der Grösse zweier (also aller vier) Winkel.

Erkl. 299. Die Kongruenzbedingungen für die nebenstehend behandelten Vierecke findet man erörtert im IV. Teile dieses Lehrbuches, und zwar für Sehnenvierecke in Figur 80, Tangentenvierecke in Frage 87, Kreisvierecke in Frage 91; die entsprechenden Vielecke in Frage 95 daselbst.

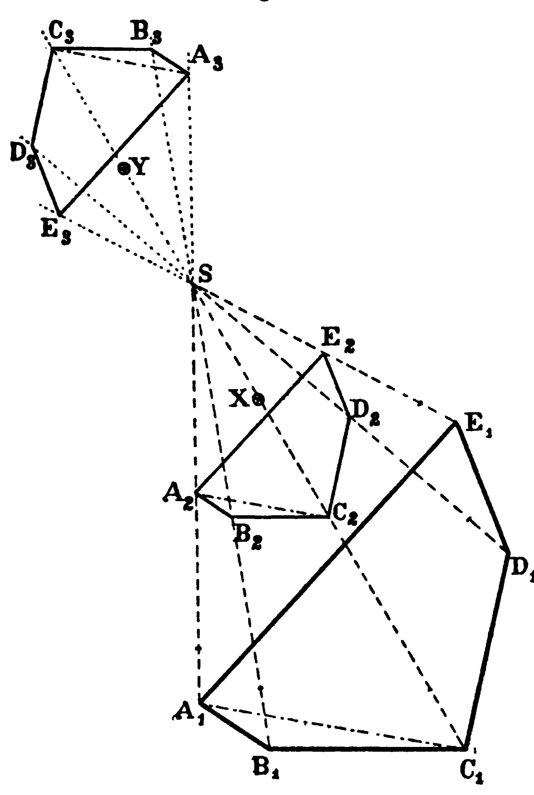
Aufgabe 79. In den beiden Gruppen ähnlicher Vielecke in Figur 53 soll etwa Punkt C_2 als ein der Figur $A_1B_1C_1D_1E_1$ zugehöriger Punkt angesehen werden. Man suche den entsprechenden Punkt in Figur $(ABC\cdots)_2$ und $(ABC\cdots)_3$.

Auflösung. Soll C_2 ein Punkt der Figur $(ABC\cdots)_1$ sein, so muss der in $(ABC\cdots)_2$ entsprechende Punkt X auf demselben Aehnlichkeitsstrahle liegen, wie Punkt C_2, so zwar, dass sich verhält:

$$SC_2 : SX = SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = SC_1 : SC_2 \cdots$$



Figur 53.



Erkl. 800. Man sieht, dass auf dem Aehnlichkeitsstrahle SC die Proportionen gelten:

$$SC_1 : SC_2 = SC_2 : SX$$

und

$$SC_1 : SC_3 = SC_2 : SY,$$

also die Gleichungen:

$$\overline{SC_2}^2 = SC_1 \cdot SX \text{ und } SC_1 \cdot SY = SC_2 \cdot SC_3.$$

Ersteres liefert die Beziehung, dass wenn derselbe Punkt (C_2) einmal zur einen und einmal zur andern zweier ähnlicher Figuren in perspektivischer Lage zugerechnet wird, dann der Abstand dieses Punktes vom Aehnlichkeitspunkt die mittlere geometrische Proportionale wird zu den Abständen der beiden ihm in jeder Figur zugeordneten Punkte.

Man konstruiert also SX als vierte Proportionale zu den drei Strecken SA_1, SA_2, SC_2.

Dies geschieht am leichtesten dadurch, dass man C_2 etwa mit A_1 verbindet, und die Parallele zur Verbindungslinie durch A_2 zieht. Diese schneidet dann den Aehnlichkeitsstrahl SC_2 in X.

Auf genau dieselbe Weise findet man den Punkt Y, welcher als zugehöriger Punkt zur Figur $(ABC\cdots)_3$ entsteht, entsprechend dem als Punkt von $(ABC\cdot\cdot)_1$ aufgefassten Punkt C_2.

Erkl. 801. Dementsprechend könnte man auf jedem Aehnlichkeitsstrahl, z. B. SA denjenigen Punkt Z bestimmen, für welchen:

$$\overline{SA_2}^2 = SA_1 \cdot SZ$$

ist; und man hat dann die drei Punkte A_1, A_2, Z in der Reihenfolge, dass zu A_1 als Punkt von $(ABC\cdot\cdot)_1$ der Punkt A_2 in $(ABC\cdot\cdot)_2$ gehört; dagegen zu A_2 als Punkt von $(ABC\cdot\cdot)_1$ der Punkt Z als Punkt von $(ABC\cdot\cdot)_2$.

Erkl. 802. Die zweite der in Erklärung 300 aufgestellten Beziehungen unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass die Punkte, deren Abstände von S die gleichen Produkte bilden, nicht auf gleicher, sondern auf entgegengesetzter Seite von S gelegen sind. Dabei kann ein Produkt zweier gleichen Abstände insofern nicht auftreten, weil die multiplizierten Strecken stets entgegengesetzte Vorzeichen haben. Diese Unterscheidung wird von Wichtigkeit in der sog. Geometrie der Lage bei der Lehre von den involutorischen Punktreihen mit oder ohne Doppelpunkte.

Aufgabe 80. Man soll zwei gegebene gleichwendig ähnliche Figuren in perspektivische Lage bringen.

Erkl. 803. Die Richtungen zweier entsprechenden Strahlen beider Figuren bilden zweierlei Winkel, welche einander (als Nebenwinkel) zu 180° ergänzen. Je nachdem man um den einen oder andern dieser Winkel herum-

Auflösung. Ist $(ABC\cdot\cdot)_1 \sim (ABC\cdot\cdot)_2$, so lasse man $(ABC\cdot\cdot)_1$ an seiner Stelle unverändert liegen und drehe $(ABC\cdot\cdot)_2$ um einen beliebigen Punkt innerhalb, auf, oder ausserhalb dieser Figur um den Winkel zweier entsprechenden Strahlen beider Figuren so herum, dass diese Strahlen parallel werden.

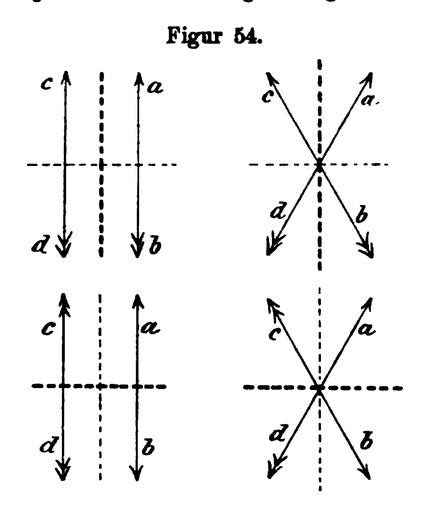
dreht, erhält man für zwei parallele entsprechenden Strahlen beider Figuren gleichgerichtete oder entgegengesetzt gerichtete Parallelität, und damit auch die perspektivische Lage entweder mit äusserem oder innerem Aehnlichkeitspunkte S.

Erkl. 304. Bei solchen ähnlichen Figuren, bei denen gleichwendige und ungleichwendige Aehnlichkeit gleichzeitig stattfindet, liefert jede der beiden in voriger Erklärung besprochenen Drehungen die Möglichkeit sowohl eines äusseren, als eines inneren Aehnlichkeitspunktes. Ausserdem gilt für solche Figuren selbstverständlich sowohl die in Aufgabe 80, als die in Auflösung der Aufgabe 81 angegebene Herstellungsweise der verlangten Beziehungen: allerdings wegen eben der Eigenschaft beiderartiger Aehnlichkeit der Figuren nicht mit verschiedenem, sondern mit gleichbleibendem Ergebnis (vergleiche Aufgabe 84).

Dann sind beide Figuren $(ABC\cdots)_1$ und $(ABC\cdot\cdot)_2$ in perspektivischer Lage. Denn dann sind alle entsprechenden Strahlen beider Figuren parallel, die Strecken proportional, die Winkel gleich, also gehen die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte beider Figuren durch denselben Aehnlichkeitspunkt S.

Aufgabe 81. Man soll zwei gegebene ungleichwendig ähnliche Figuren in perspektivische Lage bringen.

Figur 54.



Erkl. 305. Dass bei der ersten Auflösung vorstehender Aufgabe die beiden Einzelfälle der Erkl. 303 stattfinden, ist selbstverständlich. Bei der zweiten Auflösung erhält man dasselbe Ergebnis auf Grund folgender Ueberlegung. Die Richtungen zweier entsprechenden Strahlen beider Figuren bilden wieder zweierlei Winkel, welche einander zu zwei Rechten ergänzen, und deren Winkelhalbierende zu einander senkrecht stehen. Klappt man um die Halbierungslinie des ersten Winkels um, so entsteht parallele Lage mit der einen Richtung des entsprechenden Strahles der andern Figur; klappt man um die Winkelhalbierende des zweiten Winkels um, so entsteht parallele Lage mit der andern Richtung des entsprechenden Strahles (vergl. Figur 54, wo Richtung a erst auf Richtung c,

Auflösung. 1) Man kann die Aufgabe auf die vorige zurückführen, indem man Figur $(ABC\cdot\cdot)_2$ erst beliebig umklappt und dann noch dreht in der in voriger Auflösung angegebenen Weise.

2) Man kann aber diese beiden Vorgänge auf einen zurückführen, indem man eine passend gewählte Linie als Umklappungsachse wählt. Dies ist eine Halbierungslinie des Winkels zweier entsprechenden Strahlen beider Figuren, oder auch jede Parallele zu einer solchen Linie. Denn man erkennt sofort, dass bei Umklappung um irgend eine mit dieser Winkelhalbierenden parallele Gerade jeder Strahl der Figur $(ABC\cdot\cdot)_2$ zu dem entsprechenden Strahl von $(ABC\cdot\cdot)_1$ parallel wird. (Man vergleiche hierzu besonders auch die Aufgaben 86 bis 88 der Aufgabensammlung am Schlusse des III. Teiles dieses Lehrbuches.)

dann auf Richtung *b* fällt, je nachdem um die senkrechte oder um die wagerechte Achse umgeklappt wird; und ebenso Richtung *d* erst auf Richtung *b*, dann auf Richtung *c*). Und je nachdem die eine oder andere Art der Parallelität entsprechender Strahlen beider Figuren hergestellt wird, erhält man einen äussern oder innern Aehnlichkeitspunkt.

Erkl. 806. Für die Lage des zu erhaltenden Aehnlichkeitspunktes ist es wichtig, ob um die Halbierungslinie selbst oder um eine Parallele dazu umgeklappt wird. Im ersten Falle nämlich fallen die zwei entsprechenden Strahlen beider Figuren in dieselbe Gerade, und dadurch muss diese Gerade zu einem Aehnlichkeitsstrahl werden: der Aehnlichkeitsstrahl liegt auf eben dieser Geraden (vergleiche Figur 14). Wird dagegen um eine Parallele zur Winkelhalbierenden umgeklappt, so entsteht beliebig allgemeine Lage des Aehnlichkeitspunktes.

Aufgabe 82. Lässt sich in beiden vorhergehenden Aufgaben der Umdrehungsmittelpunkt bezw. die Umklappungsachse so wählen, dass ein vorgegebener Punkt zum Aehnlichkeitspunkt wird?

Erkl. 807. Für beide Fälle nebenstehender Auflösung ist erst die Lage zu konstruieren, welche eine bestimmte Strecke der Figur erhalten soll. Dann ist die Aufgabe zurückgeführt auf die bereits im III. Teile dieses Lehrbuches gelösten Aufgaben: zwei kongruente Figuren zur Deckung zu bringen durch möglichst einfache Operationen. Dort fand sich in beiden Fällen die Möglichkeit durch je zwei der Operationen: Umklappung, Drehung, Verschiebung; und nur für den Fall gleichwendiger Kongruenz konnte alles auf eine passend gewählte Drehung sich beschränken.

Auflösung. 1) Für gleichwendig ähnliche Figuren lässt sich stets ein Umdrehungsmittelpunkt so finden, dass die beiden Figuren zu einem vorgegebenen Aehnlichkeitspunkte perspektivisch werden. Man wählt nämlich als solchen den gemeinsamen Schnittpunkt aller Mittelsenkrechten zwischen je einem Punkt der zu drehenden Figur und demjenigen Punkte, an welchen dieser gelangen soll (vergleiche Satz 96 im III. Teile dieses Lehrbuches).

2) Für ungleichwendig ähnliche Figuren ist eine solche Vereinfachung nicht möglich. Wohl aber genügt nach einer passend gewählten Umklappung (wie in Auflösung der Aufgabe 81) eine Parallelverschiebung nach der Stelle, welche die Figur erhalten soll.

Aufgabe 83. Man soll die Figur 53 als übereinstimmend mit den Figuren 13 bis 15 ansehen und die einzelne Vergleichung herstellen.

Erkl. 808. Geometrische Konstruktionen, welche, ein solches Zufügen von Streckenverlängerungen, äusseren Punkten und Linien erforderlich machen wie in nebenstehender Auflösung, gibt es in grosser Zahl. Man erinnere sich bloss an Höhenfusspunkte und Höhenpunkt beim stumpfwinkligen Dreieck, oder Parallelen zu dessen Seiten durch die Gegenecken; auch Konstruktion der angeschriebenen Kreise bei Dreieck und Viereck, u. a.

Erkl. 809. Betrachtet man nicht eine einzelne Figur der Ebene für sich, sondern die

Auflösung. 1) Bei Figur 53 liegt der Aehnlichkeitspunkt ausserhalb der Figuren, bei Figur 13 innerhalb. Man verlängere also in Figur 53 etwa die Seiten A_1B_1 und D_1E_1 um ein beliebiges über A_1 bezw. E_1 hinaus, so dass die Verbindungslinie der neuen Endpunkte $A_1'E_1'$ jenseits des Punktes S liegt. Dann ist die Figur $A_1'B_1C_1D_1E_1'$ eine solche, die den Aehnlichkeitspunkt S einschliesst, und die entsprechende Figur $A_2'B_2C_2D_2E_2'$ liegt ebenfalls vollständig innerhalb der vorigen Figur, und doch so, dass die Verbindungsstrecken $A_1'A_2'$, $E_1'E_2'$ ebenso wie $B_1B_2 \cdots$ durch den Aehnlichkeitspunkt S äusserlich geteilt werden.

ganze Zeichnungsebene mit allen ihren Punkten und Linien als „ebenes System", so braucht man gar nicht zu Verlängerungen und ähnlichem zu greifen. Dann besteht die Figur $(ABC\cdot\cdot)_1$ nicht nur aus den wenigen wirklich gezeichneten Strecken oder Punkten, sondern aus allen Punkten und Linien der Zeichnungsebene, indem diese zum gezeichnet vorliegenden Teil der Figur $(ABC\cdot\cdot)_1$ als in Beziehung gesetzt gelten. Ebenso besteht aber auch die Figur $(ABC\cdot\cdot)_2$ oder $(ABC\cdot\cdot)_3$ nicht nur aus deren wirklich gezeichneten Strecken oder Punkten, sondern aus allen Punkten und Linien der Zeichnungsebene, indem diese zum gezeichnet vorliegenden Teil dieser Figur $(AB\cdot\cdot)_2$ oder $(AB\cdot\cdot)_3$ als in Beziehung gesetzt gelten. Jeder Punkt und jede Linie der Zeichnungsebene ist also dreifach anzusehen: einmal gehörig zu $(AB\cdot\cdot)_1$, dann zu $(AB\cdot\cdot)_2$, dann zu $(AB\cdot\cdot)_3$. Auch S und jede Gerade durch S gehört also allen drei Figuren an — und zwar Punkt S und diese letztgenannten Geraden durch S als sich selbst entsprechende Geraden. Jeder andern Geraden der Ebene entspricht in jeder Figur eine verschiedene Gerade.

Bildet man auch die neue Figur:

$$A_3'B_3C_3D_3E_3',$$

so tritt die analoge Beziehung für den inneren Aehnlichkeitspunkt auf, indem dann jede Verbindungsstrecke $A_1'A_3'$, $E_1'E_3'$ ebenso wie $B_1B_3\cdot\cdot$ durch S innerlich geteilt wird.

2) Um die Uebereinstimmung der Fig. 53 mit Figur 14 herzustellen, braucht man nur die neue Linie $A_1'E_1'$ in Figur 53 so zu wählen, dass sie durch Punkt S geht. Dann geht auch $A_2'E_2'$ durch S, und ebenso $A_3'E_3'$, und es besteht wieder äussere Teilung durch S für alle Strecken $A_1'A_2'$ $B_1B_2\cdot\cdot$, dagegen innere Teilung für alle Strecken $A_1'A_3'$, $B_1B_3\cdot\cdot\cdot$

3) Die Uebereinstimmung zwischen Fig. 53 und Figur 15 entsteht ohne weiteres; indem man die Strecken A_1S und E_1S als Strecken der Figur $(ABC\cdot\cdot\cdot)_1$ zurechnet. Dann treten natürlich ebenso die Strecken A_2S und E_2S bezw. A_3S und E_3S als entsprechende auf zu den Figuren $(ABC\cdot\cdot)_2$ und $(ABC\cdot\cdot)_3$; und Punkt S als Aehnlichkeitspunkt liegt in der allen dreien gemeinsamen Ecke S.

Aufgabe 84. Man soll die beiden Arten der gleichwendigen und ungleichwendigen Aehnlichkeit bei achsig oder zentrisch-symmetrischen Figuren untersuchen.

Erkl. 310. Man hat zu unterscheiden zweierlei Arten der Aehnlichkeit, nämlich gleichwendige und ungleichwendige, und zur erstern zweierlei Arten perspektivische Lage, nämlich mit äusserem oder innerem Aehnlichkeitspunkte. Ungleichwendig ähnliche Figuren können nun ausnahmsweise insofern auch in perspektivische Lage gebracht werden, wenn sie gleichzeitig auch gleichwendig ähnlich sind. Dies trifft zu bei Figuren, die achsig-symmetrisch sind, aber auch da nur insoweit, dass durch den Aehnlichkeitspunkt die Verbindungslinien für diejenigen Punkte gehen, welche einander durch gleichwendige Aehnlichkeit zugeordnet sind, niemals für die durch ungleichwendige Aehnlichkeit einander zugeordneten Punkte.

Erkl. 311. Wählt man als Beispiel zu nebenstehender Auflösung etwa ein Viereck, so sind achsig-symmetrisch: Antiparallelogramm und Deltoid, zentrisch-symmetrisch das Parallelogramm, achsig und zentrisch Rechteck, Rhombus, Quadrat. Sind nun etwa zwei Deltoide (oder Antiparallelogramme) ähnlich, so kann man sie als gleichwendig ähnlich ansehen, oder als ungleichwendig ähnlich. Denn beim Umlauf $A_1B_1C_1D_1A_1 \backsim A_2B_2C_2D_2A_2$ hat man das

Auflösung. 1) Ist eine Figur achsig-symmetrisch, so erhält sie durch Umklappung um ihre Symmetrieachse genau dieselbe Lage wieder wie zuvor, indem die beiden Hälften aufeinander fallen. Sind also zwei achsig-symmetrische ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage, so kann die eine der beiden um ihre Symmetrieachse umgeklappt werden, ohne dass die Aehnlichkeit und deren perspektivische Lage aufgehoben sind. Wird dieselbe Figur um eine andere Linie, als die Symmetrieachse, umgeklappt, so geht im allgemeinen Falle die perspektivische Lage verloren. Nur wenn die neue Umklappungsachse zur Symmetrieachse parallel oder senkrecht war, tritt wegen des Verbleibens der parallelen Lage der umklappten Geraden der besondere Fall ein, dass immer noch perspektivische Lage besteht, und zwar im ersten Falle mit einem Aehnlichkeitspunkte von derselben Art, im letztern Falle von der entgegengesetzten Art wie zuvor. Diese Erhaltung der perspektivischen Lage, aber mit Aehnlichkeitspunkt von der entgegengesetzten Art, tritt auch ein, wenn die eine der beiden Figuren um 180^0 umgedreht wird um einen beliebigen Punkt

Innere beidemale zur Linken, beim Umlauf $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1 \sim C_2 B_2 A_2 D_2 C_2$ hat man das Innere erst zur Linken, dann zur Rechten, und geht doch immer über verhältnisgleiche Seitenstrecken und um gleichgrosse Winkel. Aber man hat nur einen einzigen Aehnlichkeitspunkt, nämlich entweder einen äussern oder einen innern. Eine Umklappung der einen Figur um ihre Symmetrieachse oder um eine Parallele oder eine Senkrechte zu derselben belässt die Aehnlichkeit sowohl als gleichwendige wie als ungleichwendige. Die Umklappung um die Achse selbst oder eine Parallele derselben belässt auch die Existenz eines Aehnlichkeitspunktes (nur im letztern Falle in veränderter Lage) von derselben Art wie zuvor; Umklappung um eine Senkrechte zur Achse aber liefert statt des vorigen innern Aehnlichkeitspunktes einen äussern; und umgekehrt statt eines vorherigen äussern einen innern. Mit dem Ergebnis des letzten Vorgangs identisch ist bei achsig-symmetrischer Figur das einer Umdrehung von 180°.

Erkl. 812. Sind zwei Parallelogramme ähnlich, so hat man zu unterscheiden, ob sie gleichwendig oder ungleichwendig ähnlich sind, d. h. ob etwa beim Uebergang von der langen auf die kurze Seite am stumpfen Winkel das Innere beidemale links oder rechts liegt, oder das eine Mal links das andre Mal rechts. Im letztern Falle ist perspektivische Lage unmöglich ohne Umklappung; im erstern Falle aber gleich beiderlei perspektivische Lage, d. h. solche mit äusserem und innerem Aehnlichkeitspunkte.

Erkl. 813. Sind zwei Rechtecke (oder Rhomben) ähnlich, so hat man gleichzeitig beiderlei Aehnlichkeit (gleichwendige und ungleichwendige) und beiderlei perspektivische Lage (mit äusserm und innerm Aehnlichkeitspunkt). Man kann also zusammenstellen:

Mangel jeglicher Symmetrie: Einerlei Aehnlichkeit (bleibt bestehen bei Umdrehung; mit der andern vertauscht durch Umklappung); einerlei perspektivische Lage (vertauscht mit der andern Art durch Umdrehung, aufgehoben durch Umklappung).

Achsige Symmetrie: Beiderlei Aehnlichkeit (beide bleiben bestehen bei Umklappung und Umdrehung) einerlei perspektivische Lage (letztere bleibt bestehen bei Umklappung um Symmetrieachse oder Parallele dazu; wird vertauscht mit der andern Art durch Umklappung um Senkrechte zur Symmetrieachse oder Umdrehung).

Zentrische Symmetrie: Einerlei Aehnlichkeit (mit der andern Art vertauscht durch Umklappung, bleibt bestehen bei Umdrehung) beiderlei perspektivische Lage (beide bleiben bestehen bei Umdrehung, beide werden aufgehoben durch Umklappung).

Achsige und zentrische Symmetrie: Beiderlei Aehnlichkeit und beiderlei perspektivische Lage der Ebene. Achsig-symmetrische Figuren haben gleichzeitig gleichwendige und ungleichwendige Aehnlichkeit; denn einem Umlauf der einen Figur in einer bestimmten Umlaufsrichtung kann an der entsprechenden Figur sowohl der eine, als der andere Umlauf zugeordnet werden, je nachdem dem ersten Punkte einer der beiden symmetrisch entsprechenden Punkte der andern Figur zugeordnet ist. In perspektivischer Lage kann allerdings nur die eine, die gleichwendige Aehnlichkeit, zur Anschauung gelangen.

2) Ist eine Figur zentrisch-symmetrisch, so kann man in einem beliebigen Punkte derselben einen Umlauf nach der einen oder andern Umdrehungsrichtung beginnen: — und jedesmal erhält man identisch denselben Umlauf der Figur, wenn man im entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers beginnt. Wird also zu einer solchen Figur eine ähnliche in perspektivischer Lage gezeichnet, so kann einem beliebig gewählten ersten Punkte jeder Endpunkt des dem zugehörigen Durchmesser entsprechenden Durchmessers zugeordnet werden und damit der einen Hälfte der ersten Figur die eine oder andere Hälfte der andern Figur. Die eine Zuordnung liefert einen äussern, die andere einen innern Aehnlichkeitspunkt. Durch eine beliebige Umklappung geht aber im allgemeinen Falle beiderlei perspektivische Lage gleichzeitig verloren, und weder die eine, noch die andere lässt sich durch Drehung allein ohne erneute Umklappung wieder herstellen.

3) Ist eine Figur zugleich achsig und zentrisch-symmetrisch, dann finden beiderlei Eigenschaften gleichzeitig statt: Die Figur ist zu einer ähnlichen in perspektivischer Lage sowohl durch einen äussern als einen innern Aehnlichkeitspunkt in Beziehung zu setzen, und bei Umklappung um eine Parallele oder Senkrechte zur Symmetrieachse erhält man wieder eine perspektivische Lage von beiderlei Art: Daher ist auch bei ähnlichen Figuren, welche sowohl achsig als auch zentrisch-symmetrisch sind, nicht mehr zu unterscheiden nach gleichwendiger oder ungleichwendiger Aehnlichkeit; beiderlei Aehnlichkeit fällt bei ihnen zusammen oder findet gleichzeitig statt.

(alle beide bleiben bestehen bei Umdrehung und Umklappung um Parallele oder Senkrechte zur Symmetrieachse).

Aufgabe 85. Welche Ortsveränderungen gestattet ein Quadrat, ohne dass seine perspektivische Lage zu einem andern mit parallelen Seiten aufgehoben wird?

Erkl. 814. Wenn in irgend einer ersten der nebenstehend genannten Lagen die Verbindungslinien der Eckpunkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ der Reihe nach mit $A_2 B_2 C_2 D_2$, oder auch mit $C_2 D_2 A_2 B_2$ durch einen Punkt gehen, so bleibt dies bei allen bestehen, nur dass jeweils der Punkt andere Lage erhält. Nie aber gehen durch einen Punkt die Verbindungslinien mit $B_2 A_2 D_2 C_2$ oder mit $D_2 C_2 B_2 A_2$. Denn gleichwendig ähnlich sind $(ABCD)_1 \backsim (ABCD)_2$ und $(ABCD)_1 \backsim (CDAB)_2$, aber ungleichwendig ähnlich sind $(ABCD)_1 \backsim (BADC)_2$ und $(ABCD)_1 \backsim (DCBA)_2$.

Auflösung. Ein Quadrat ist mit jedem andern Quadrat ähnlich, und bei Parallelität einer einzigen Seite auch in perspektivischer Lage sowohl mit innerem als mit äusserem Aehnlichkeitspunkte. Beiderlei Arten der perspektivischen Lage bleiben erhalten:

1) bei Umklappung um eine Parallele zu irgend einer der Seiten,

2) bei Umklappung um eine Parallele zu einer der Diagonalen,

3) bei Umdrehung um irgend ein Vielfaches von 90°.

Aufgabe 86. Auf einer Karte ist die Entfernung Hamburg—Ulm dargestellt durch eine Länge von 11,3 cm, während dieselbe in Wirklichkeit 565 km beträgt. Durch wieviel Fläche ist auf dieser Karte ganz Württemberg dargestellt?

Auflösung. Man findet den Längenmassstab der Karte durch die Division 11,3 cm : 565 km = 11,3 cm : 56500000 cm = 1 : 5 000 000. Jeder Centimeter der Karte stellt also 50 km dar, und umgekehrt wird jeder natürliche Kilometer auf der Karte dargestellt durch $\frac{1}{50}$ cm, also jeder Quadratkilometer durch $\frac{1}{2500}$ qcm = 0,0004 qcm $= \frac{4}{100}$ qmm. Demnach erhalten die 19500 qkm Württembergs ihre Darstellung durch:

$$195 \cdot 4 \text{ qmm} = 7{,}8 \text{ qcm}$$

Umgekehrt stellt jeder Quadratmillimeter der Karte 25 qkm der Natur dar, oder jeder Quadratcentimeter der Karte 2500 qkm der Natur.

Erkl. 815. Uebliche Reduktionsmassstäbe in der Geographie sind (nach Wagner):

		Von Karte zu Karte fortlaufendes Verhältnis der Längen		Flächen	
1 : 25000 Messtischblätter		1 :	0,005 :	1 :	0,000025 :
1 : 100000 topographische Karten		4 :	0,02 :	16 :	0,0004 :
1 : 500000 Spezialkarten		20 :	0,1 :	400 :	0,01 :
1 : 1000000 Generalkarten		40 :	0,2 :	1600 :	0,04 :
1 : 2500000 Provinzkarten		100 :	0,5 :	10000 :	0,25 :
1 : 5000000 Karten von Einzelländern	in einem Schul-Atlas	200 :	1 :	40000 :	1 :
1 : 10000000 Karten mehrerer Länder	in einem Schul-Atlas	400 :	2 :	160000 :	4 :
1 : 20000000 Teilkarten von Erdteilen	in einem Schul-Atlas	800 :	4 :	640000 :	16 :
1 : 40000000 Karten der ganzen Erdteile	in einem Schul-Atlas	1600 :	8 :	2560000 :	64 :
1 : 120000000 ganze Erdkarten	in einem Schul-Atlas	4800.	24.	23040000.	576.

Aufgabe 87. Zur Darstellung einer quadratischen Fläche von 64 Ar Inhalt steht ein Blatt von 20 cm Länge und Breite zur Verfügung. Welche Massstäbe für Länge und Fläche werden entstehen?

Erkl. 816. Ist der Längenmassstab $l:L$, so wird der Flächenmassstab $f:F = l^2:L^2$; ist umgekehrt der Flächenmassstab $f:F$, so wird der Längenmassstab $l:L = \sqrt{f:F}$. Oder zu $1:l$ gehört $1:f = 1:l^2$; zu $1:f$ dagegen $1:l = 1:\sqrt{f}$.

Auflösung. Die abzubildende Fläche enthält 64 a = 6400 qm = 640 000 dm. Die Bildfläche enthält 400 qcm = 4 qdm. Also wird der Flächenmassstab:

$$4:640\,000 = 1:160\,000.$$

Demnach entsteht ein Längenmassstab von 1:400.

Aufgabe 88. In einem Atlas hat auf einer Karte, deren Massstab 1:2 500 000, ein gewisses Land eine Fläche von 24 qcm; auf einer andern Karte, deren Massstab 1:4 000 000 ist, hat ein anderes Land eine Fläche von 45 qcm. Wievielmal so gross ist letzteres Land als ersteres?

Erkl. 817. Um die Grösse eines Landes auf einer Karte zu messen, kann man entweder die vom Gradnetz der Karte gebildeten, meist rechtwinkligen Felder benützen, oder auch eigens dazu bestimmte Instrumente, die sog. Planimeter, welche mittels Umfahren des Umfangs eine Bestimmung des Flächeninhalts liefern.

Auflösung. Die wirkliche Grösse des erstern Landes ist:

$$24 \cdot 2\,500\,000^2 = 24 \cdot 6\,250\,000\,000\,000$$
$$= 150\,000\,000\,000\,000 \text{ qcm} = 15000 \text{ qkm}:$$

die Fläche des zweiten Landes ist:

$$45 \cdot 4\,000\,000^2 = 720\,000\,000\,000\,000 \text{ qcm}$$
$$= 72\,000 \text{ qkm}.$$

Das Grössenverhältnis der Länder ist also:

$$72\,000 : 15000 = 4{,}8,$$

d. h. das zweite Land ist 4,8 mal so gross, als das erstere.

Aufgabe 89. Man soll den Satz 18 in allgemeiner Form aussprechen.

Erkl. 878. Umgekehrt kann man auch aussprechen:

Satz. Wenn von drei auf den Seiten eines Dreiecks konstruierten ähnlichen Figuren die eine ebensoviel Fläche (mehr Fläche, weniger Fläche) hat, als die Summe der beiden andern, so ist der Dreieckswinkel gegenüber der Grundseite der ersten Figur ein Rechter (grösser, kleiner als ein Rechter).

Auflösung. Setzt man in Satz 18 statt der ähnlichen Figuren über den Seiten ein rechtwinkliges Dreieck irgend welcher Strecken ebener Systeme, die zu den drei Seiten ähnliche Lage haben, so erhält man:

Satz. Haben in drei ähnlichen ebenen Systemen je drei homologe Strecken die Eigenschaft, dass sie Hypotenuse und Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden können, so ist jede beliebige Fläche des ersten Systems gleich der Summe der beiden entsprechenden Flächen der beiden anderen Systeme.

Aufgabe 90. Man soll ein Antiparallelogramm unter Beibehaltung der Basiswinkel in ein gleichschenkliges Dreieck verwandeln.

Erkl. 819. Man hat in Figur 55:

$$\triangle ABE \sim DCE \sim GBH.$$

Homologe Stücke dieser drei Dreiecke sind AB, DC, GB. Für diese gilt:

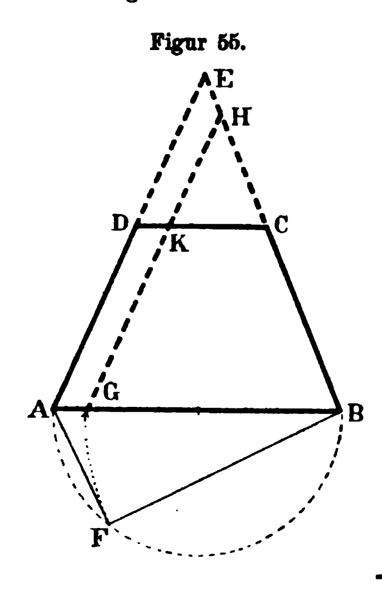
$$AB^2 = \overline{DC}^2 + \overline{GB}^2,$$

folglich gilt auch:

$$ABE = DCE + GBH \text{ oder } GBH = ABCD.$$

Auflösung. Ein Antiparallelogramm $ABCD$ in Figur 55 ist sofort darstellbar als Differenz der beiden gleichschenkligen ähnlichen Dreiecke $ABE - DCE$, deren jedes eine der Grundseiten des Antiparallelogramms zur Grundseite, seine Schenkel zu Schenkeln hat. Errichtet man also über der Grundseite AB einen Halbkreis, trägt in denselben als Sehne die Strecke $CD = AF$

Figur 55.



ein, so ist BF die andere Kathete, für welche $BF^2 = AB^2 - AF^2$. Folglich ist auch ein mit denselben Winkeln über Grundseite BF errichtetes gleichschenkliges Dreieck gleich der Differenz der ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten AB und AF. Trägt man also $BF = BG$ auf AB auf, und zieht $GH \parallel AE$, so wird:

$$\triangle BGH = ABE - DCE = ABCD.$$

Erkl. 320. Nebenbei erhält man auch:

$$AGKD = KCH.$$

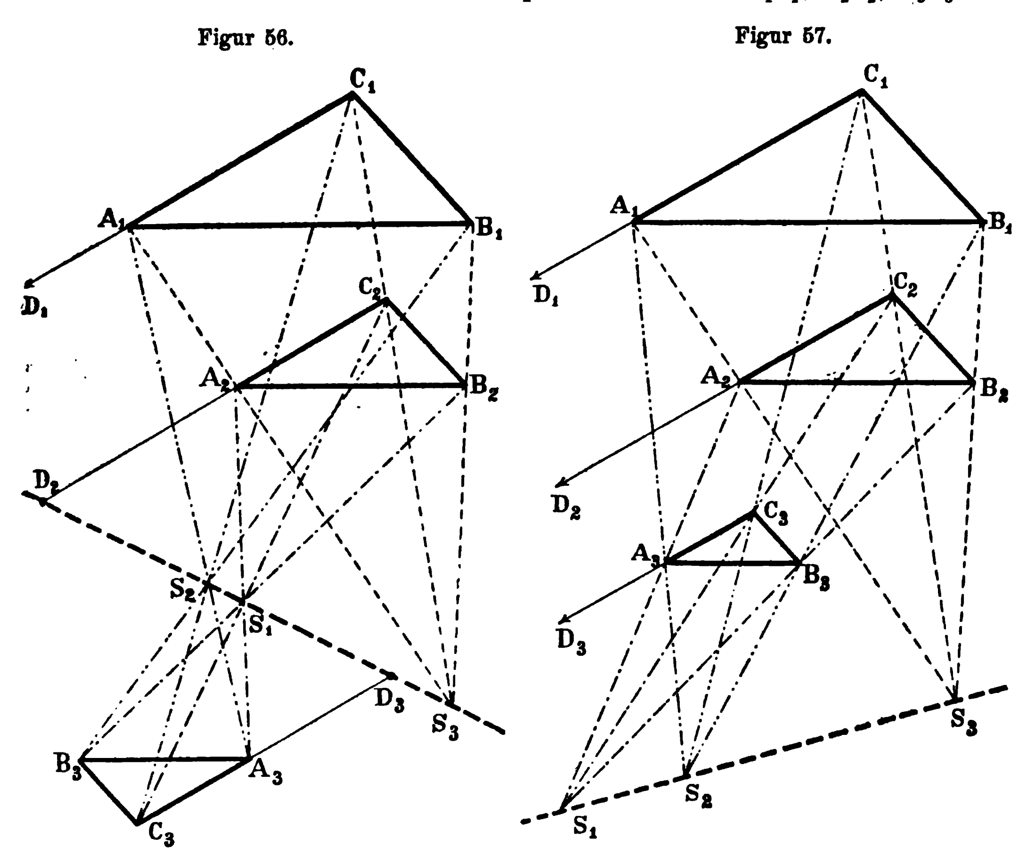
Denn das erstere Parallelogramm wird vom Trapez abgeschnitten und dafür letzteres Dreieck angesetzt.

Dadurch ist ein Parallelogramm verwandelt in ein gleichschenkliges Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels.

Aufgabe 91. Man soll den Beweis zu Satz 19 in rechnender Weise führen.

Auflösung. Bezeichnet man, wie in Figur 56 und 57, mit $D_1 D_2 D_3$ die Schnittpunkte der Linien A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 mit

Figur 56. Figur 57.



Erkl. 321. In den Figuren 56 und 57 ist jedesmal:

$$A_1B_1 : A_2B_2 = 3 : 2,$$
$$A_2B_2 : A_3B_3 = 7 : 4,$$

also in fortlaufender Proportion:

$$A_1B_1 : A_2B_2 : A_3B_3 = 21 : 14 : 8.$$

Demnach ist auch in jeder der beiden Figuren:

$$S_3D_1 : S_3D_2 = 21 : 14,$$
$$S_1D_2 : S_1D_3 = 21 : 8$$

und

$$S_2D_3 : S_2D_1 = 8 : 14.$$

Während aber in Figur 57 die Richtungen SD sämtlich gleich gerichtet sind, ist dies in Figur 56 nur für S_3 der Fall, nicht aber für S_1 und S_2.

Erkl. 322. Die gegenseitige Lage der Punkte D_{123} und S_{123} auf der Aehnlichkeitsachse ist abhängig von der Lage der Figuren $(ABC)_{123}$. Feststehend ist daher nur, dass jeder äussere Aehnlichkeitspunkt S seine zugehörige Strecke DD äusserlich, jeder innere Aehnlichkeitspunkt dagegen seine zugehörige Strecke DD innerlich teilt. In beiden Figuren aber kann dann etwa die Gruppe $D_1D_3S_2$ gegen die beiden anderen Gruppen $D_1D_2S_3$ oder $D_2D_3S_1$ verschoben werden, je nachdem man der Figur $(ABC)_3$ gegen die anderen Figuren $(ABC)_2$ und $(ABC)_1$ andere Lage gibt, auch wenn diese beiden festbleiben.

der Verbindungslinie S_2S_3 — ohne Rücksicht auf die etwaige Lage von S_1 — so erhält man wegen S_3 die Proportion:

$$A_1D_1 : A_2D_2 = S_3A_1 : S_3A_2 = A_1B_1 : A_2B_2$$

und wegen S_2 die Proportion:

$$A_3D_3 : A_1D_1 = S_2A_3 : S_2A_1 = A_3B_3 : A_1B_1.$$

Bei gliedweiser Multiplikation beider Gleichungen entsteht (durch Wegfall der gleichen Stücke A_1D_1 bezw. A_1B_1):

$$A_3D_3 : A_2D_2 = A_3B_3 : A_2B_2.$$

Folglich sind D_3 und D_2 ähnlich liegende Punkte der Figuren $(ABC)_3$ und $(ABC)_2$, und deshalb muss die Verbindungslinie D_3D_2 durch den Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Figuren gehen, d. h. umgekehrt: der Aehnlichkeitspunkt S_1 muss auf der vorherigen Verbindungslinie $D_1D_2D_3S_2S_3$ liegen.

Erkl. 323. Eine andere Beweisführung für denselben Satz 19 findet man später in Aufgabe 145 als Anwendung des Satzes von Menelaos.

Aufgabe 92. Man soll die Geltung desselben Satzes 19 für zentrisch-symmetrische Figuren verfolgen.

Erkl. 324. In Figur 58 ist der Aehnlichkeitspunkt jeweils bestimmt durch die Strahlen von den Endpunkten eines Durchmessers, anstatt durch die Strahlen zweier homologen Seiten. Denn $(AB)_1$ und $(AB)_2$ liefern zwar denselben äussern Aehnlichkeitspunkt S_3, wie $(AC)_1$ und $(AC)_2$; ebenso auch $(AB)_1$ und $(CD)_2$ denselben innern Aehnlichkeitspunkt J_3, wie $(AC)_1$ und $(CA)_2$; aber es hätte die Figur bei Durchführung dieser Zeichnungen einer solchen Menge von Linien bedurft, dass die Deutlichkeit darunter hätte leiden müssen. Eine Vergleichung mit Figur 11 (s. Seite 33) zeigt deutlich die Richtigkeit dieser Vereinfachung. Denn auch dort gehen durch S_a die Strahlen SAA'_a und SCC'_a, durch S_i dagegen die Strahlen CC'_i und AA'_i.

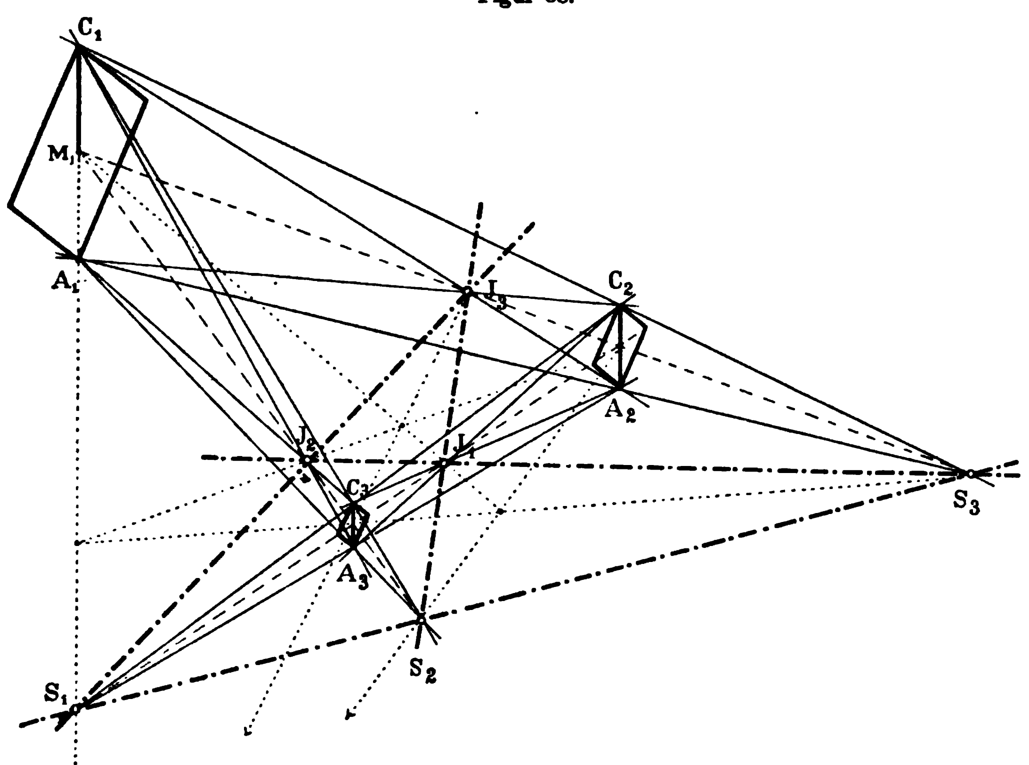
Erkl. 325. Für äussere Aehnlichkeitspunkte S entsprechen sich die Strecken AC und AC, für innere Aehnlichkeitspunkte J dagegen die Strecken AC und CA. Nur die Mittelpunkte der Strecken AC sind für beide Fälle gleichermassen entsprechend. Daher müssen die Mittelpunkte der Strecken AC auf den Verbindungs-

Auflösung. Es seien $(AC)_{1,2,3}$ drei einander entsprechende Durchmesser dreier ähnlichen Parallelogramme in perspektivischer Lage. Dann gibt es eine Aehnlichkeitsachse für die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte $S_1S_2S_3$, wie in voriger Aufgabe und Fig. 57. Ebenso aber auch eine zweite Aehnlichkeitsachse für den äussern Aehnlichkeitspunkt S_3 von $(AC)_1$, $(AC)_2$ und für die beiden innern Aehnlichkeitspunkte J_1 u. J_2 der Figurenpaare $(AC)_2(CA)_3$ und $(AC)_1(CA)_3$ wie in Fig. 56; ferner eine dritte Aehnlichkeitsachse für den äussern Aehnlichkeitspunkt S_2 von $(AC)_1$ $(AC)_3$ und für die beiden innern Aehnlichkeitspunkte J_3 und J_1 der Figurenpaare $(AC)_1$ $(CA)_2$ und $(AC)_2(CA)_3$; endlich eine vierte Aehnlichkeitsachse für den äussern Aehnlichkeitspunkt S_1 von $(AC)_2$ und $(AC)_3$ und für die beiden inneren Aehnlichkeitspunkte J_2 und J_3 der Figurenpaare $(AC)_3(CA)_1$ und $(AC)_1$ $(CA)_2$. Man hat also im ganzen sechs Punkte, die zu je drei auf einer Geraden liegen:

$$S_1S_2S_3,\ S_1J_2J_3,\ S_2J_3J_1,\ S_3J_1J_2.$$

Und die vier Aehnlichkeitsachsen bilden die vier Seitenlinien eines vollständigen Vierseits,

Figur 58.



linien der Aehnlichkeitspunkte S_1J_1, S_2J_2, S_3J_3 liegen. Nennt man diese Punkte $M_1M_2M_3$, so ist für S_3J_3:

$$M_1S_3 : M_2S_3 = AC_1 : AC_2$$

und

$$M_1J_3 : M_2J_3 = AC_1 : AC_2,$$

also:

$$M_1S_3 : M_2S_3 = M_1J_3 : M_2J_3 = AC_1 : AC_2.$$

Ebenso für S_1J_1:

$$M_2S_1 : M_3S_1 = M_2J_1 : M_3J_1 = AC_2 : AC_3,$$

und für S_2J_2:

$$M_3S_2 : M_1S_2 = M_3J_2 : M_1J_2 = AC_3 : AC_1.$$

Also werden die Diagonalen S_1J_1, S_2J_2, S_3J_3 des Vierseits der Aehnlichkeitsachsen durch die Mittelpunkte der ähnlichen Figuren harmonisch geteilt: je im Verhältnis entsprechender Strecken der zwei Figuren.

Erkl. 326. Umgekehrt werden auch die drei Seiten des Dreiecks $M_1M_2M_3$ der Mittelpunkte je harmonisch geteilt durch die sechs Aehnlichkeitspunkte in Verhältnissen, von denen je eines das Produkt der beiden andern ist. Hieraus folgt nach Aufgabe 209 des VI. Teiles ein neuer Beweis dafür, dass die sechs Punkte S und J zu je dreien auf einer Geraden liegen dessen Eckpunkte jene sechs Aehnlichkeitspunkte sind.

Man erhält daher folgende Zusammenfassung dieser Ergebnisse:

Satz. Befinden sich drei zentrisch symmetrische Figuren sämtlich in perspektivischer Lage, so gibt es zu jedem Paar einen äussern und einen innern Aehnlichkeitspunkt. Und diese sechs Aehnlichkeitspunkte liegen zu je dreien auf einer Geraden, nämlich die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte auf der äussern Aehnlichkeitsachse, je ein äusserer mit den zwei anderen inneren auf einer von drei inneren Aehnlichkeitsachsen. Die drei Diagonalen des von den vier Aehnlichkeitsachsen gebildeten vollständigen Vierseits gehen durch die Mittelpunkte der drei ähnlichen Figuren und werden daselbst harmonisch geteilt.

Dieser Satz wurde für drei Kreise (siehe im nächsten Teile dieses Lehrbuches) zuerst aufgestellt von dem französischen Mathema-

müssen. Und aus Aufgabe 210 daselbst folgt, dass wenn man auch die Liniengruppen:

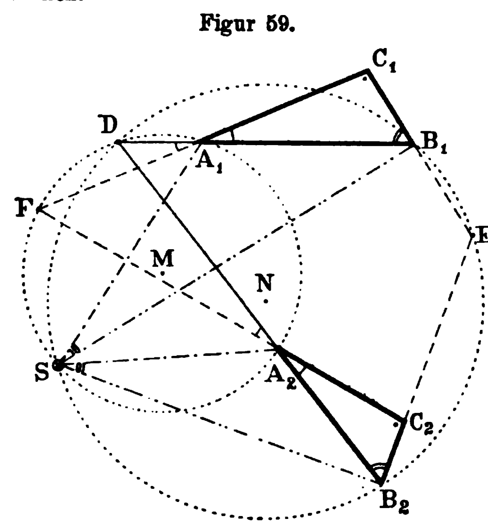
$$M_1 S_1,\ M_1 J_1;\ M_2 S_2,\ M_2 J_2;\ M_3 S_3,\ M_3 J_3$$

zieht, dann auch diese sechs Linien zu je dreien durch einen von vier gemeinsamen Punkten gehen. Man vergleiche auch hierüber, wie in Erkl. 323 angegeben, die späteren Aufgaben 145.

tiker Monge und wird daher auch benannt: Satz von Monge.

Aufgabe 93. Man soll zu zwei beliebig gegebenen, gleichwendig ähnlichen Figuren in schiefer Lage den Aehnlichkeitspunkt suchen.

Figur 59.



Auflösung. 1) Nach Antwort der Frage 47 und Satz 20 besteht für je zwei gleichwendig ähnliche Figuren ein Aehnlichkeitspunkt. Derselbe wird gefunden als gemeinsamer Schnittpunkt aller der Kreise, welche je ein Paar der gleichgrossen entsprechenden Winkel beider Figuren als Peripheriewinkel haben, z. B. α_1 und α_2 in Figur 59 oder β_1 und β_2, γ_1 und $\gamma_2\cdot\cdot$ Jeder dieser Kreise geht durch die Scheitel der beiden Winkel und durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Schenkel, also A_1A_2DF; B_1B_2DE; C_1C_2EF.

2) Da nach Antwort der Frage 47 auch für Punkt S die Proportionen gelten:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = \cdots$$
$$= \varkappa = A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2\cdot\cdot,$$

so gehört der Punkt S zu den Punkten, welche von A_1 und A_2, oder von B_1 und B_2, oder von C_1 und $C_2\cdot\cdot$ das Abstandsverhältnis $\varkappa$ haben. Alle Punkte mit konstantem Abstandsverhältnisse von zwei gegebenen Punkten liegen aber nach Satz 12 des VI. Teiles auf dem Appollonischen Kreise, welcher die Verbindungsstrecke der beiden Punkte innen und aussen nach dem Verhältnis $\varkappa$ harmonisch senkrecht teilt. Folglich erhält man einerseits den

Satz. Für zwei ähnliche Systeme gehen sämtliche Apollonischen Kreise, welche den Abstand irgend zweier entsprechenden Punkte beider Figuren innen und aussen harmonisch nach dem Verhältnis entsprechender Strecken beider Figuren senkrecht teilen, durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Aehnlichkeitspunkt.

Und anderseits erhält man eben dadurch eine weitere Konstruktion des Aehnlichkeitspunktes.

Erkl. 327. Die vorstehende Aufgabe könnte auch so gefasst sein: In zwei gegebenen ähnlichen ebenen Systemen soll der in beiden Systemen sich selbst entsprechende Punkt gesucht werden. Dieser Punkt hat dann diejenigen Eigenschaften, welche in Antwort der Frage 41 aufgestellt wurden, mit Ausnahme der unter 1, 2, 4, 6 genannten, weil diese nur für perspektivische Lage gelten. Man erkennt hierdurch die Zweckmässigkeit der Benennung der „perspektivischen Lage“ gegenüber dem andern Ausdruck „ähnliche Lage“. Denn auch in schiefer Lage beider Figuren befinden sich eigentlich je zwei entsprechende Punkte zum Aehnlichkeitspunkt in ähnlicher Lage, weil eben dieser selbstentsprechender Punkt ist. Nur bei perspektivischer Lage hat der Aehnlichkeitspunkt die Eigenschaft, dass wenn man ein Auge an seinen Platz versetzt denkt, dann jeder Blick vom Aehnlichkeitspunkte aus durch zwei entsprechende Punkte durchsieht (perspektivisch von per und spicere, durch-sehen), so dass die Aehnlichkeitsstrahlen die Sehstrahlen vom Auge oder die Lichtstrahlen zum Auge sind.

Erkl. 328. Nicht nur die Kreise durch DS und A_1A_2 gehen durch Punkt S, sondern auch viele andere: Wählt man nämlich auf den zwei

Strecken A_1B_1 und A_2B_2 irgend zwei entsprechende Punkte K_1K_2, so ist wegen der Eigenschaften des Aehnlichkeitspunktes auch:

$$\triangle SA_1K_1 \sim SA_2K_2,$$

also:

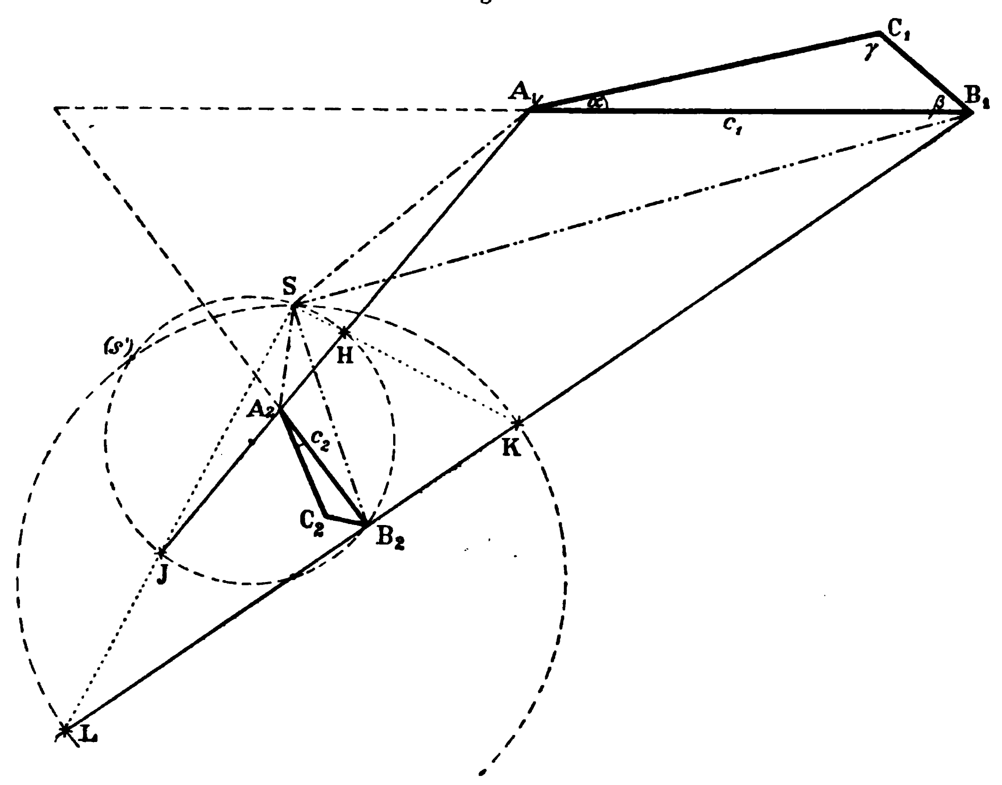
$$\sphericalangle A_1K_1S = A_2K_2S,$$

oder:

$$\sphericalangle DK_1S = DK_2S,$$

also gehen auch die Kreise durch D, K_1 und K_2 durch S. Ebenso gehen durch S alle Kreise durch E und irgend zwei entsprechende Punkte auf B_1C_1 und B_2C_2, sowie alle durch F und zwei entsprechende Punkte auf C_1A_1 und C_2A_2. Umgekehrt kann man sagen, dass das Kreisbüschel durch S und D auf A_1B_1 und A_2B_2, das Kreisbüschel durch S und E auf B_1C_1 und B_2C_2, jenes durch S und F auf C_1A_1 und C_2A_2 stets zwei entsprechende Punkte ausschneidet.

Figur 60.



Aufgabe 94. Man soll die zwei selbstentsprechenden Geraden zweier ungleichwendig ähnlichen Figuren in schiefer Lage aufsuchen.

Erkl. 329. Es ist die Frage zu stellen, welcher der beiden Schnittpunkte der Apollonischen Kreise der richtige Aehnlichkeitspunkt

Auflösung. 1) Um die selbstentsprechenden Geraden zu finden, kann man erst deren gemeinsamen Ausgangspunkt, nämlich den Aehnlichkeitspunkt aufsuchen. Dies geschieht nach Antwort der Frage 48, indem man, wie in der zweiten Auflösung voriger Aufgabe die Ver-

ist. Diese Frage könnte zunächst geometrisch dadurch beantwortet werden, dass man nicht nur die Strecken A_1A_2 und B_1B_2, sondern auch etwa C_1C_2 innen und aussen im gleichen Verhältnis 3 : 1, wie die übrigen teilt. Dann geht der neue Apollonische Kreis zwar noch durch S, nicht mehr aber durch S'.

Erkl. 380. Aber auch ohne Hinzunahme des Apollonischen Kreises zu C_1C_2 kann man erkennen, welcher Schnittpunkt der richtige ist. Denn die Punkte liegen immer so, dass für den einen (S' in Figur 60) die Dreiecke $SA_1B_1 \sim SA_2B_2$ gleichwendig ähnlich sind, für den andern aber (S in Figur 60) dieselben Dreiecke ungleichwendig ähnlich werden.

Erkl. 381. Bei gleichwendig ähnlichen Systemen bilden je zwei entsprechende Strecken gleiche Winkel, bei ungleichwendig ähnlichen Systemen aber ungleiche, so A_1B_1 und A_2B_2 in Figur 60 einen kleineren als A_1C_1 und A_2C_2, und wieder einen anderen als B_1C_1 und B_2C_2. Aber jeder Strahl von $(ABC)_1$ bildet mit den beiden Linien SH und SJ denselben Winkel, wie sein entsprechender Strahl in $(ABC)_2$. Stets ist SH parallel der Halbierungslinie des Innenwinkels, SJ parallel der Halbierungslinie des Nebenwinkels zweier entsprechenden Strahlen.

Erkl. 382. Die Strahlen SH und SJ sind selbstentsprechend als ganze Linien, d. h. der Gesamtheit von Punkten auf SHK oder SJL in $(ABC)_1$ entspricht eine Gesamtheit von Punkten in $(ABC)_2$, welche jeweils derselben Geraden angehören, aber an andern Stellen derselben liegen. Schon bei der Trennung dieser Linien in zwei Strahlen hat man eine Unterscheidung: Die den Punkten des Strahles SHK entsprechenden Punkte erfüllen denselben Strahl SHK; die den Punkten des Strahles SJL entsprechenden Punkte aber erfüllen die Verlängerung dieses Strahles über S hinaus und umgekehrt: Der Verlängerung des Strahles SHK entspricht dieselbe Verlängerung; der Verlängerung von SJL dagegen eben der Strahl SJL.

Um auch die entsprechenden Punkte selbst auf dem Strahle zu finden, benützt man das Verhältnis entsprechender Strecken, das ja in Fig. 60 gleich 3 : 1 gesetzt ist. So entspricht dem Punkte H (oder K), als einem Punkte von $(SABC)_2$ derjenige Punkt auf SHK als Punkt von $(SABC)_1$, welcher die dreifache Entfernung von S hat und umgehrt. Ebenso entspricht etwa einem Punkte J (oder L) auf SJL, als einem Punkte von $(SABC)_1$ derjenige Punkt auf der Verlängerung von SJL als der Punkt von $(SABC)_2$, dessen Entfernung von S nur den dritten Teil der Entfernung von J (oder L) beträgt.

bindungsstrecken entsprechender Punkte im Verhältnis der entsprechenden Strecken beider Figuren innen und aussen teilt und über den Teilpunkten die Apollonischen Kreise errichtet. Der eine Schnittpunkt dieser Kreise ist der Aehnlichkeitspunkt S. Durch ihn zieht man sodann zwei Geraden parallel den Halbierungslinien des Winkels und Nebenwinkels zweier entsprechenden Geraden beider Figuren.

2) Denselben Punkt S und dieselben beiden Strahlen erhält man auch unmittelbar durch die Verbindungslinien von S mit den Teilpunkten HK bezw. JL der Verbindungsstrecken $AABB$.

3) Zum Beweise beachtet man, dass wegen der Apollonischen Kreise die Proportionen gelten:

$SA_1 : SA_2 = A_1H : HA_2 = A_1J : JA_2 = c_1 : c_2$

und

$SB_1 : SB_2 = B_1K : KB_2 = B_1L : LB_2 = c_1 : c_2$,

also müssen SH und SJ die Halbierungslinien des Innen- und Aussenwinkels S für Dreieck A_1SA_2 sein, und auch SK und SL Halbierungslinien des Innen- und Aussenwinkels S für Dreieck B_1SB_2. Nun folgt aber aus voriger Proportion auch, dass:

$$SA_1 : SA_2 = c_1 : c_2 = SB_1 : SB_2,$$

also mit Vertauschung:

$$SA_1 : c_1 : SB_1 = SA_2 : c_2 : SB_2.$$

Daher ist Dreieck:

$$SA_1B_1 \sim SA_2B_2, \quad \sphericalangle A_1SB_1 = A_2SB_2.$$

Folglich ist die Halbierungslinie von A_1SA_2 identisch mit der Halbierungslinie von B_1SB_2. d. h. SHK und SJL liegen je auf derselben geraden Linie.

Betrachtet man nun S erst als Punkt der Figur $(SABC)_1$, dann als Punkt der Figur $(SABC)_2$, so entspricht einem Strahl von $(SABC)_1$, welcher mit SA_1 einen Winkel A_1SH bildet, ein solcher Strahl der Figur $(SABC)_2$, welcher mit SA_2 in entgegengesetzter Drehungsrichtung den gleichgrossen Winkel A_2SH bildet, d. h. SHK ist selbstentsprechende Gerade für die Figuren $(SABC)_1$ und $(SABC)_2$.

Ebenso entspricht dem Strahl von $(SABC)_2$, welcher mit SA_2 einen Winkel A_2SJ bildet, ein solcher Strahl von $(SABC)_1$, welcher mit SA_1 in entgegengesetzter Richtung den gleichgrossen Winkel bildet, und das ist die Verlängerung von LJS über S hinaus; also ist auch Linie SJL als ganze genommen eine selbstentsprechende Gerade beider Figuren.

Aufgabe 95. Man soll diejenigen Sätze aufstellen, welche gegenüber dem in Auflösung der Aufgabe 93 aufgestellten gemeinsamen Satze bloss für die einzelnen Arten ähnlicher Figuren gelten.

Auflösung. Dem gemeinsamen Satze in Auflösung der Aufgabe 93 stehen folgende beiden Sätze für die einzelnen Arten ähnlicher Figuren entgegen:

Satz. In zwei gleichwendig ähnlichen Systemen gehen durch denselben Punkt, den Aehnlichkeitspunkt, alle Kreise durch je zwei entsprechende Punkte und die Schnittpunkte der durch diesen Punkt gehenden entsprechenden Geraden.

Und für die andere Art gilt:

Satz. In zwei ungleichwendig ähnlichen Systemen liegen auf denselben beiden selbstentsprechenden Geraden (SH und SJ in Figur 60) sämtliche Punkte, welche die Verbindungsstrecken entsprechender Punktepaare innen bezw. aussen im Verhältnis der entsprechenden Strecken beider Figuren teilen. Die beiden Geraden sind zu einander senkrecht und treffen einander im Aehnlichkeitspunkt.

Erkl. 333. Die vorstehenden Ueberlegungen zeigen, dass der am Schlusse der Auflösung der Aufgabe 93 ausgesprochene Satz allgemeine Gültigkeit hat für gleichwendige und ungleichwendige Systeme. Daher ist bei demselben auch die Bezeichnung der Gattung der Aehnlichkeit wegzulassen. Sind die Systeme gleichwendig ähnlich, so gehen alle Apollonischen Kreise durch denselben Punkt S_g, der mit je zwei entsprechenden Strecken beider Figuren gleichwendig ähnliche Dreiecke bildet, und je zwei Kreise schneiden einander in einem andern Punkte S_u, welcher jeweils nur mit den beiden, diesen beiden Kreisen zugehörigen Strecken ungleichwendig ähnliche Dreiecke bildet. Und sind umgekehrt die Systeme ungleichwendig ähnlich, so gehen alle Apollonischen Kreise durch denselben Punkt S_u, der mit je zwei entsprechenden Strecken beider Figuren ungleichwendige Dreiecke bildet, und je zwei Kreise schneiden einander in einem andern Punkte S_g, welcher jeweils nur mit den beiden, diesen beiden Kreisen zugehörigen Strecken gleichwendig ähnliche Dreiecke bildet.

Erkl. 334. Im ersten der nebenstehenden Sätze ist auch folgender enthalten: Denkt man durch zwei entsprechende Punkte zweier gleichwendig ähnlichen Systeme (A_1 und A_2 in Figur 60) sämtliche möglichen Strahlen gezogen, und ordnet jedem Strahl des ersten Strahlenbüschels den im andern System entsprechenden Strahl des zweiten Büschels zu, so liegen die Schnittpunkte je zweier solchen entsprechenden Strahlen beider Büschel auf dem Kreise durch die beiden Scheitelpunkte ($A_1 A_2$) und den Aehnlichkeitspunkt S. In ungleichwendig ähnlichen Systemen bilden dieselben Schnittpunkte eine andere krumme Linie durch A_1 und A_2, nämlich eine „Hyperbel“. (Vergleiche die ähnlichen Kapitel in der Geometrie der Lage.)

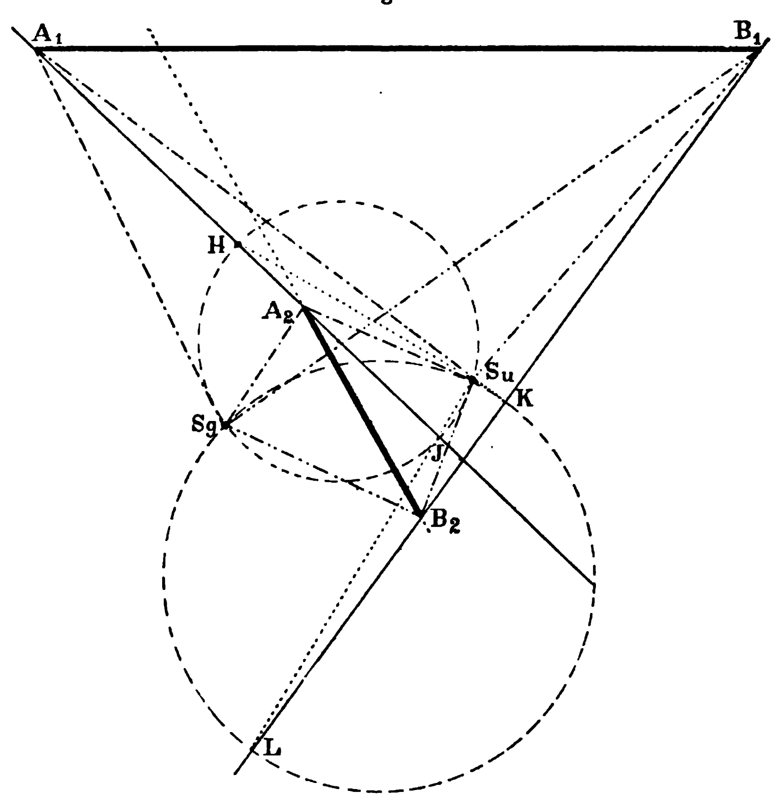
Aufgabe 96. Man soll zu zwei beliebigen Strecken A_1B_1, A_2B_2 die beiden (gleichwendig bezw. ungleichwendig liegenden) Aehnlichkeitspunkte konstruieren.

Auflösung. 1) Beide Aehnlichkeitspunkte zugleich erhält man durch Konstruktion nach dem Satze in Auflösung der Aufgabe 93.

2) Den gleichwendig gelegenen Aehnlichkeitspunkt erhält man als Schnittpunkt der Kreise nach dem ersten Satz in Auflösung der Aufgabe 95.

Erkl. 335. Die beiden Strecken A_1B_1 und A_2B_2 der Figur 61 sind keineswegs bloss als Strecken anzusehen, sondern dieselben liefern jeweils die Grundstrecke für ein an dieselbe anzuschliessendes „ebenes System“. Diese beiden ebenen Systeme werden ähnlich, wenn an A_1 und B_1 bezüglich unter gleichen Winkeln

Figur 61.



stets proportionale Strecken angetragen werden. Und diese Aehnlichkeit ist die gleichwendige, wenn die Winkel in gleicher, dagegen ungleichwendig, wenn die Winkel in entgegengesetzter Drehungsrichtung angetragen werden.

3) Den ungleichwendig gelegenen Aehnlichkeitspunkt erhält man als Schnittpunkt der beiden Geraden nach dem zweiten Satz in Auflösung der Aufgabe 95.

Erkl. 336. Das eine der beiden ebenen Systeme gelangt zum andern in perspektivische Lage:

a) mit äusserem Aehnlichkeitspunkt S_g bezw. S_u (oder einem andern Punkte der Ebene):

1) wenn sie gleichwendig ähnlich sind durch Drehung um S_g (oder einen andern Punkt der Ebene) um einen Winkel, der gleichgross ist dem Winkel $A_1SA_2 = B_1SB_2$;

2) wenn sie ungleichwendig ähnlich sind durch Umklappung um die Linie S_uHK (oder eine Parallele dazu);

b) mit innerem Aehnlichkeitspunkt S_g bezw. S_u (oder einem andern Punkte der Ebene):

1) wenn sie gleichwendig ähnlich sind durch Drehung um S_g (oder einen andern Punkt der Ebene) um einen Winkel, der supplementär ist dem Winkel $A_1SA_2 = B_1SB_2$;

2) wenn sie ungleichwendig ähnlich sind durch Umklappung um die Linie S_uJL (oder eine Parallele dazu).

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

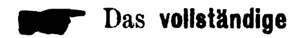
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich**, **ohne jede Bedeutung** für die Interessenten

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.



Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

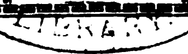
der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

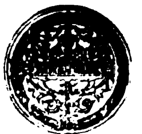
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1340. Heft. Preis des Heftes 25 Pf. Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil. Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren. Forts. v. Heft 1339. — Seite 129—144. Mit 7 Figuren.







Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1339. — Seite 129—144. Mit 7 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1894.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln,** Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung zur **Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 97. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die vier Teilwinkel der Diagonalen und das Verhältnis der Diagonalen gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 75 und 76.

Aufgabe 98. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem alle Winkel und dazu der Umfang eines der Teildreiecke gegeben ist.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 75 und 76.

Aufgabe 99. Man soll die Aehnlichkeitsbedingungen für Sehnenvielecke aufstellen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 100. Dieselbe Aufgabe für Tangentenvielecke zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 101. Dieselbe Aufgabe für Kreisvielecke zu lösen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 78.

Aufgabe 102. Man soll zu einer grössern Anzahl innerer und äusserer Punkte — diesseits und jenseits des Aehnlichkeitspunktes die jeweils entsprechenden Punkte der andern Figur konstruieren.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 79.

Aufgabe 103. In welcher Reihenfolge liegen auf denselben Aehnlichkeitsstrahlen die in beiden Figuren entsprechenden Punkte?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 17 und Erkl. 300 und 301.

Aufgabe 104. Zwei ähnliche Figuren so in perspektivische Lage zu bringen, dass ein vorgegebener Punkt S Aehnlichkeitspunkt wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 80 und 81.

Aufgabe 105. Ein Quadrat zu einem andern Quadrat in perspektivische Lage zu bringen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 80 und 81.

Aufgabe 106. Ein rechtwinkliges Dreieck in perspektivische Lage zu seinen Teildreiecken zu bringen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 81.

Aufgabe 107. Die Sätze der Erkl. 313 sollen auf Antiparallelogramm und Deltoid angewandt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 84 und Erkl. 313.

Aufgabe 108. Wie verteilen sich die Ergebnisse der Aufgabe 85 auf Rechteck und Rhombus?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 85.

Aufgabe 109. Wie gross wird ein Land von 15000 qkm auf einer Karte mit Massstab 1:500000 oder 1:100000?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 86.

Aufgabe 110. Welche Fläche kann auf einem Blatt von 15 cm Breite und 24 cm Höhe (einer Seite dieses Buches) dargestellt werden im Massstab 1:25000?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 87.

Aufgabe 111. Wie verhalten sich die wahren Längen und Flächen, deren Abbildungen auf verschiedenen Kartenblättern in verschiedenen Massstäben dargestellt sind?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 88.

Aufgabe 112. Man soll Satz 18 für die Teildreiecke des rechtwinkligen Dreiecks anwenden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 89.

Aufgabe 113. Die Summe oder Differenz zweier ähnlichen Figuren soll wieder in Gestalt einer ähnlichen Figur dargestellt werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 90.

Aufgabe 114. Wievieler Bestimmungsstücke bedarf die Angabe der auf der Aehnlichkeitsachse dreier ähnlichen Figuren entstehenden Strecken $S_{123} D_{123}$ in Figur 56 und 57?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 91.

Aufgabe 115. Wie könnte man für drei zentrische Figuren die sechs Aehnlichkeitspunkte durch Rechnung finden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 92.

Aufgabe 116. Was folgt für Figur 58 aus dem Satz 19 des VI. Teiles?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 92.

Aufgabe 117. Zwei gleichwendig ähnliche Systeme unter Beibehaltung des Aehnlichkeitspunktes in perspektivische Lage zu bringen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 93.

Aufgabe 118. Zu gegebenem Punkt einer Ebene mit zweierlei gleichwendig ähnlichen Systemen den entsprechenden Punkt erst im einen, dann im andern zu suchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 93.

Aufgabe 119. Dieselbe Aufgabe zu lösen für ungleichwendig ähnliche Systeme.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 94.

Aufgabe 120. Was wird aus den Kreisen der Figur 59, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel sind?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 93.

Aufgabe 121. Man soll durch eine einzige Operation zwei gleichwendig ähnliche Systeme in perspektivische Lage bringen, so dass ein vorher gegebener Punkt S Aehnlichkeitspunkt wird.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 94 bis 96.

Aufgabe 122. Dieselbe Aufgabe für zwei ungleichwendig ähnliche Systeme zu versuchen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 94 bis 96.

---

5) Aufgaben über die Sätze von Menelaos und Ceva.

(Zu Abschnitt 6.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 123. Man soll die Uebereinstimmung der Sätze in den Aufgaben 208 und 209 des VI. Teiles mit dem Satze von Menelaos einzeln ausführen.

Erkl. 387. In Figur 62 ist:

$$AE_3 : EB_3 = m : n,$$

aber:

$$AD_2 : D_2C = m : p$$

und

$$CD_1 : D_1B = p : n,$$

also:

$$1) \quad \frac{AE_3}{BE_3} = \frac{AD_2}{D_2C} \cdot \frac{CD_1}{D_1B},$$

oder:

$$\frac{AE_3}{E_3B} \cdot \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{CD_2}{D_2A} = 1;$$

Auflösung. In den genannten Aufgaben des vorigen VI. Teiles waren zwei Punkte D_1 und D_2 auf den Seiten a und b gewählt worden mit Teilungsverhältnissen:

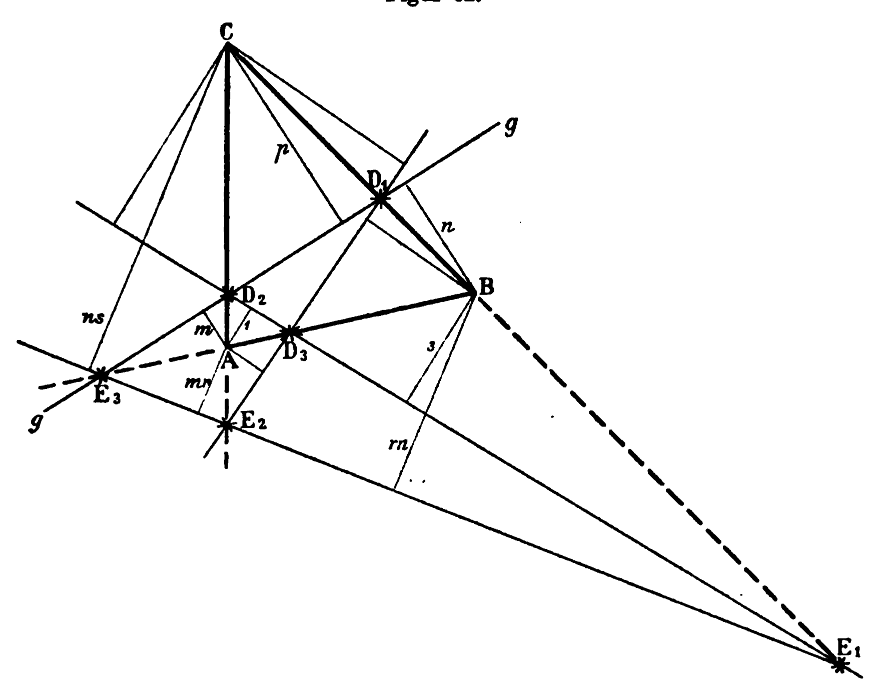
$$BD_1 : CD_1 = n : p, \; CB_2 : AD_2 = p : m.$$

Die Verbindungslinie dieser beiden Teilpunkte trifft dann die dritte Seite in einem Punkte E_3, für welchen:

$$AE_3 : BE_3 = m : n = \frac{AD_2}{CD_2} \cdot \frac{CD_1}{BD_1}.$$

Nun gibt es aber je einen innern und einen äussern Teilpunkt für a und b mit dem genannten Verhältnis $n : p$ und $p : m$, und jedesmal entsteht auf der dritten Seite das

Figur 62.



ebenso wird:

$$2)\quad \frac{AD_3}{D_3B}\cdot\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{CE_2}{E_2A}=1,$$

$$4)\quad \frac{AE_3}{E_3B}\cdot\frac{BE_1}{E_1C}\cdot\frac{CE_2}{E_2A}=1$$

und

$$3)\quad \frac{AD_3}{D_3B}\cdot\frac{BE_1}{E_1C}\cdot\frac{CD_2}{D_2A}=1;$$

also ist an derselben Figur 62 für die vier Geraden:

$D_1D_2E_3$, $D_1E_2D_3$, $E_1D_2D_3$, $E_1E_2E_3$

der Satz von Menelaos bewiesen.

Erkl. 888. Aus jenen früheren Sätzen lässt sich für diejenigen von Menelaos noch entnehmen, dass die von den Eckpunkten des Dreiecks nach einer Schnittgeraden gezogenen senkrechten oder überhaupt parallelen Abstände zu je zweien im gleichen Verhältnis stehen, wie die von demselben Eckpunkte ausgehenden Teilstrecken der Seiten.

Teilungsverhältnis $m:n$. Wählt man also die beiden ersten Punkte willkürlich, oder — was dasselbe heisst — legt man die Gerade g beliebig durch das Dreieck ABC, so hat man nichts anderes, als in vierfachem Beispiel an derselben Figur 62 den Satz von Menelaos.

Ebenso stimmt auch die Umkehrung des Satzes in Aufgabe 209 des VI. Teiles inhaltlich und auch nahezu wörtlich überein mit dem Satze 21a, nämlich der Umkehrung des Satzes von Menelaos.

Aufgabe 124. Welche Eigenschaft haben alle vom Mittelpunkt einer Dreiecksseite ausgehenden Strahlen?

Erkl. 889. Man erkennt im nebenstehenden Satze eine Verallgemeinerung und Zusammenfassung der bekannten Sätze, dass:

Auflösung. Für alle Strahlen durch den Mittelpunkt F der Seite AB gilt nach Menelaos:

$$AF\cdot BD\cdot CE = FB\cdot DC\cdot EA;$$

darin ist aber $AF = FB$, also:

$$BD\cdot CE = DC\cdot EA$$

1) die Verbindungslinie zweier Seitenmitten der dritten parallel ist, und dass:

2) die Parallele durch eine Seitenmitte zur zweiten Seite die dritte Seite halbiert. Denn Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt einer Dreiecksseite sind dann die beiden Punkte, welche diese Seite (innen oder aussen) im Verhältnis 1 : 1 teilen.

oder:

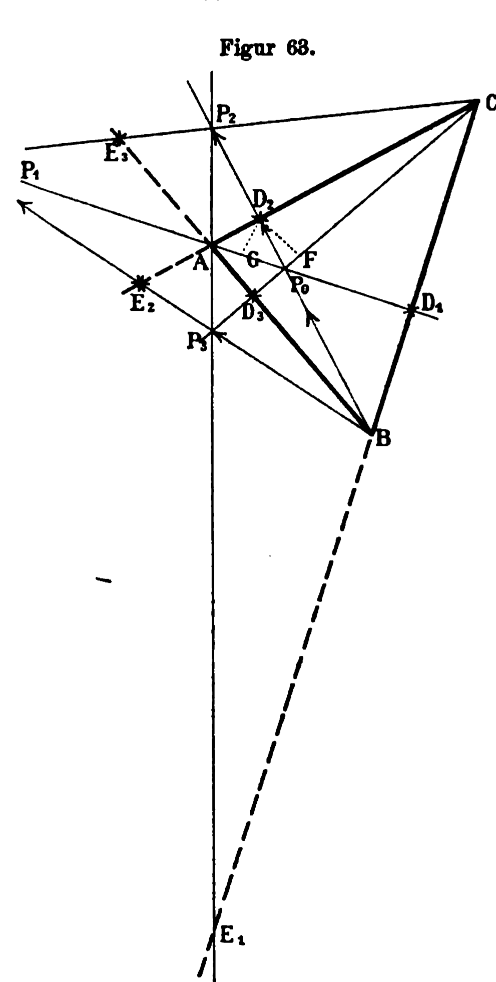
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}.$$

Man kann also die Behauptung aufstellen:

Satz. Alle Strahlen durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite teilen die beiden anderen Seiten (die eine innen, die andere aussen) in gleichem Verhältnis.

Aufgabe 125. Man soll die Uebereinstimmung der Aufgabe 210 des VI. Teiles mit dem Satze von Ceva einzeln ausführen.

Figur 63.



Auflösung. In Aufgabe 210 des vorigen VI. Teiles waren zwei Punkte D_1 und D_3 auf den Seiten a und c gewählt, jede mit der Gegenecke verbunden, und ebenso die dritte Ecke mit dem Schnittpunkt der ersten Verbindungslinie. Dann wird die dritte Seite so geteilt, dass:

1) $AD_3 : D_3B = m : n,$

2) $BD_1 : D_1C = n : p,$

folglich:

3) $AD_2 : D_2C = m : p = \frac{mn}{np}.$

Dieselbe Beziehung bleibt bestehen, wenn statt je eines oder statt beider inneren Teilpunkte auf a und c der äussere gewählt wird; also kann man überhaupt die beiden ersten Punkte und damit den Schnittpunkt ihrer Ecktransversalen willkürlich wählen, und erhält in vierfachem Beispiel an derselben Figur 63 den Satz des Ceva. Ebenso stimmt die Umkehrung des Satzes in Aufgabe 210 des VI. Teiles inhaltlich und auch nahezu wörtlich überein mit dem Satz 22a, der Umkehrung des Satzes von Ceva.

Erkl. 340. In Figur 63 ist wieder:

1) wegen P_1 $\quad \frac{AE_3}{E_3B} \cdot \frac{BD_2}{D_1C} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} = 1,$

2) wegen P_2 $\quad \frac{AE_3}{E_3B} \cdot \frac{BE_1}{E_1C} \cdot \frac{CD_2}{D_2A} = 1.$

3) wegen P_3 $\quad \frac{AD_3}{D_3B} \cdot \frac{BE_1}{E_1C} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} = 1,$

4) wegen P_0 $\quad \frac{AD_3}{D_3B} \cdot \frac{BD_1}{D_1C} \cdot \frac{CD_2}{D_2A} = 1,$

Aufgabe 126. Welche Eigenschaft haben alle auf einer Schwerlinie des Dreiecks sich schneidenden Ecktransversalen?

Auflösung. Für alle durch einen Punkt der Schwerlinie CF gehenden Ecktransversalen gilt nach Ceva:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA;$$

darin aber $AF = FB$, also:

$$BD \cdot CE = DC \cdot AE$$

oder:

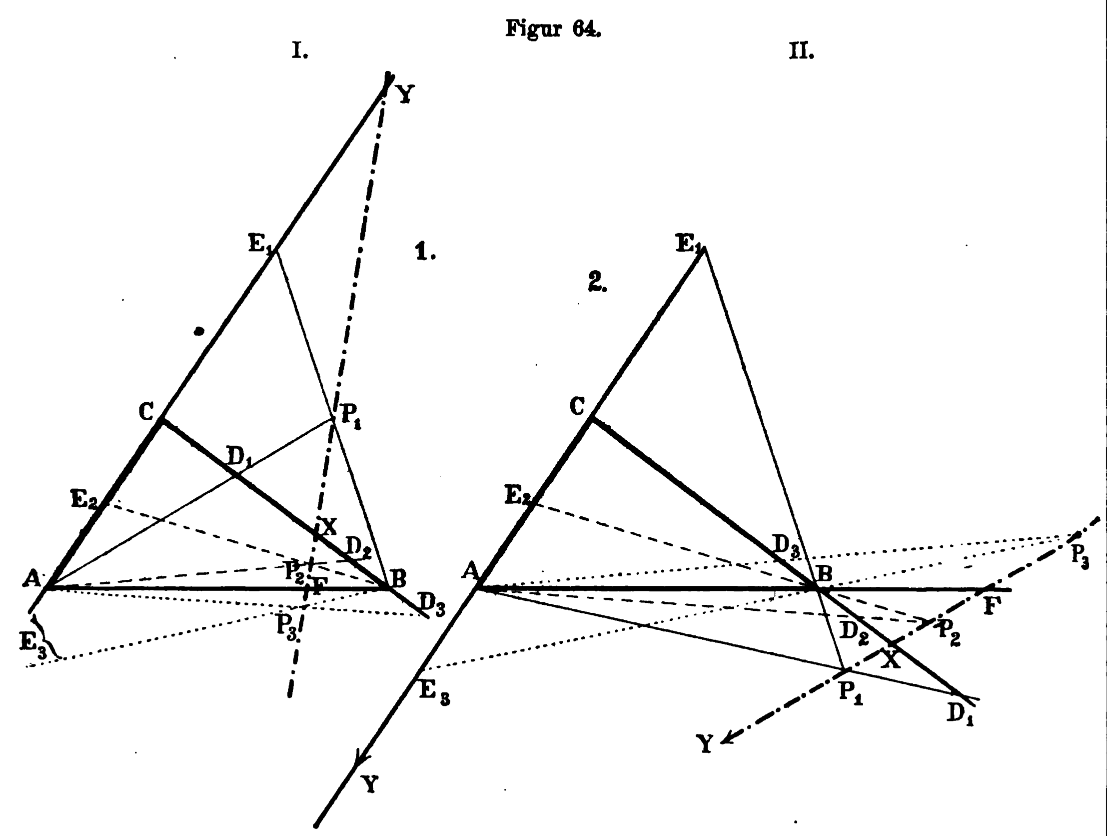
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{EC}.$$

Also gilt:

Satz. Zwei Ecktransversalen eines Dreiecks durch einen Punkt der dritten Schwerlinie teilen die beiden anderen Seiten (beide innen oder beide aussen) im gleichen Verhältnis.

Erkl. 841. Die eine der für nebenstehende Untersuchung in Betracht kommenden drei Ecktransversalen ist die Schwerlinie selbst. Auch der nebenstehende Satz (analog jenem in Auflösung der Aufgabe 124) enthält als besondern Fall eine Anzahl von früheren einfachen Sätzen der Planimetrie, vergleiche z. B. die Diagonalen im Trapez.

Figur 64.



Aufgabe 127. Man soll beweisen, dass alle Punkte P, für deren Verbindungslinien mit zwei Eckpunkten A und B eines Dreiecks die unteren Abschnitte der anderen Seiten in bestimmtem Verhältnis stehen, auf einer Geraden liegen, welche die drei Seiten so schneidet, dass:

$$AF:BF = AY:AC = BC:BX.$$

Erkl. 842. In Figur 64, I, II ist:

$$AF:FB = 3:1$$

Auflösung. 1) Zum Beweise des nebenstehenden Satzes zeigt man zunächst, dass die drei Teilpunkte F auf AB, X auf BC und Y auf AC, welche die genannten Teilungsverhältnisse liefern, auf einer Geraden liegen. Wenn nämlich:

$$AY:AC = BC:BX,$$

gesetzt, folglich auch:

$$AY = 3 \cdot AC \text{ und } BC = 3 \cdot BX,$$

oder:

$$BX = \frac{1}{3} BC.$$

Daher ist auch:

$BX : AC = BC : AY$ und $AC \cdot BC = AY \cdot BX$.

Beiden Figuren liegt genau dasselbe Dreieck zu Grunde: im ersten Falle ist AB innerlich geteilt, also:

$$AF = \frac{3}{4} AB,\ FB = \frac{1}{4} AB,$$

$$AF : FB = 3 : 1;$$

im zweiten Falle ist AB äusserlich geteilt, also:

$$AF = \frac{3}{2} AB,\ BF = \frac{1}{2} AB,$$

$$AF : BF = 3 : 1.$$

Ebenso in beiden Fällen:

$$AY = 3 \cdot AC,\ AY : AC = 3 : 1$$

und

$$BX = \frac{1}{3} BC,\ BC : BX = 3 : 1;$$

im ersten Falle mit äusserer, im zweiten Falle mit innerer Teilung.

Erkl. 343. Man sieht, dass X und Y selbst als Punkte der Geraden untere Abschnitte liefern, nämlich:

X durch AX den Abschnitt BX auf a,

durch BX den Abschnitt $AC = b$ auf b,

und ebenso:

Y durch AY den Abschnitt $BC = a$ auf a,

durch BY den Abschnitt AY auf b.

Und zwar gilt dies alles für beide Figuren 64 I und II.

Es sind also b und BX bezw. a und AY selbst untere Abschnitte der Seiten, und deren Verhältnis richtig, wie verlangt gleichgross, da ja $b : BX = AY : a$. Der Beweis besteht aber darin, dass für alle Punkte der Linie XY dieselbe Eigenschaft nachgewiesen wird, wie für diese beiden festen Punkte.

Erkl. 344. In beiden Figuren 64 I und II ist für je drei Punkte P die Zeichnung gemacht, nämlich:

P_1 so gewählt, dass durch BP_1 die Seite b äusserlich geteilt wird, wie:

$$E_1A : E_1C = 2 : 1,$$

also Seitenabschnitte AE_1 auf b, BD_1 auf a, und deren Verhältnis:

$$AE_1 : BD_1 = 2b : \frac{2}{3} a = 3b : a.$$

P_2 so gewählt, dass durch BP_2 die Seite b innerlich geteilt wird, wie:

$$E_2A : E_2C = 1 : 1,$$

so ist nach bekanntem Proportionssatze auch:

$$\frac{AY}{AY - AC} = \frac{BC}{BC - BX}$$

oder:

$$\frac{AY}{CY} = \frac{BC}{CX}.$$

Dies kann in dem Satze des Menelaos für Dreieck ABC:

$$AF \cdot BX \cdot CY = FB \cdot XC \cdot YA$$

oder:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{CX}{BX} \cdot \frac{AY}{CY}$$

eingesetzt werden, und es entsteht:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{CX}{BX} \cdot \frac{BC}{CX} = \frac{BC}{BX}.$$

Demnach liegen nach Satz 21a die drei Punkte F, X, Y auf derselben Geraden, denn aus:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AY}{AC} = \frac{BC}{BX}$$

folgt die Richtigkeit der Gleichung:

$$AF \cdot BX \cdot CY = FB \cdot XC \cdot YA.$$

2) Sodann verbindet man irgend einen Punkt P auf dieser Geraden FXY mit A und B, schneidet diese Verbindungslinie mit den Seiten AC in E und mit BC in D, und untersucht die Teilungsverhältnisse $AE : BD$. Zu dem Zwecke setzt man für die beiden Verbindungslinien als Transversalen desselben Dreiecks CXY zweimal den Satz des Menelaos an, nämlich für Transversale APD:

$$CD \cdot XP \cdot YA = DX \cdot PY \cdot AC$$

für Transversale BPE:

$$CB \cdot XP \cdot YE = BX \cdot PY \cdot EC.$$

Dividiert man diese Gleichungen, so bleibt:

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{YA}{YE} = \frac{DX \cdot AC}{BX \cdot EC}$$

oder:

$$\frac{CD}{EY} \cdot \frac{AY}{AC} = \frac{DX}{EC} \cdot \frac{CB}{BX}.$$

Da nun nach Voraussetzung:

$$\frac{AY}{AC} = \frac{BC}{BX}$$

ist, so kann hiermit wieder gekürzt werden, und es bleibt:

$$\frac{CD}{EY} = \frac{DX}{EC},$$

oder:

$$CD : DX = EY : EC.$$

Durch Addition bezw. Subtraktion entsteht hieraus:

$$(CD \pm DX) : DX = (EY \pm EC) : EC,$$

also:

$$CX : DX = CY : EC.$$

also Seitenabschnitte AE_2 auf b, BD_2 auf a, und deren Verhältnis:

$$AE_2 : BD_2 = \frac{1}{2} b : \frac{1}{6} a = 3b : a.$$

P_3 so gewählt, dass durch BP_3 die Seite b äusserlich geteilt wird, wie:

$$E_3 A : E_3 C = 1 : 3,$$

also Seitenabschnitte AE_3 auf b, BD_3 auf a, und deren Verhältnis:

$$AE_3 : BD_3 = \frac{1}{2} b : \frac{1}{6} a = 3b : a.$$

Und diese Beziehungen gelten alle für beide Teile der Figur, bloss mit Unterscheidungen der Richtung und so, dass in nebenstehender Ableitung von dem Zeichen $\pm$ das obere $+$ für $E_1 D_1$, das untere — für $E_2 D_2$, dasselbe Zeichen — mit Umstellung der Glieder für $E_3 D_3$ zu gelten hat.

Erkl. 345. Man erkennt, dass das Abschnittsverhältnis $AE : BD = r : s$ nicht allein durch das Teilungsverhältnis $AF : FB = m : n$ bestimmt ist, sondern wenn letzteres gegeben ist als $m : n$, so wird:

$$AE : BD = m \cdot b : n \cdot a,$$

oder:

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}.$$

Solches folgt schon aus dem Satze des Menelaos, da:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{m}{n} = \frac{CX}{BX} \cdot \frac{AY}{CY}.$$

Wegen:

$$\frac{r}{s} = \frac{AE}{BD} = \frac{AY}{a} = \frac{b}{BX}$$

ist hierin einzusetzen:

$$\left. \begin{aligned} AY &= \frac{a \cdot r}{s},\ CY = AY - AC = \frac{ar}{s} - b \\ BX &= \frac{b \cdot s}{r},\ CX = CB - BX = a - \frac{bs}{r} \end{aligned} \right\}$$

also:

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{ar - bs}{r} \cdot \frac{ar}{bs}}{\frac{bs}{r} \cdot \frac{ar - bs}{s}} = \frac{ar}{bs},$$

folglich:

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}.$$

Nun war oben gefunden:

$$CB : CX = AY : CY,$$

folglich auch hier durch Multiplikation:

$$CB : DX = AY : EC;$$

und wegen:

$$CB : BX = AY : AC$$

wird hieraus:

$$BX : DX = AC : EC.$$

Wiederholte Subtraktion liefert:

$$(BX \pm DX) : (AC \pm EC) = DX : EC$$
$$= BC : AY = BX : AC,$$

oder:

$$BD : AE = BC : AY = BX : AC,$$

was zu beweisen war.

Es ist also für jeden Punkt P auf der Linie FXY das Verhältnis $AD : BD$ konstant. Das Ergebnis lässt sich aussprechen als:

Geometrischer Ortssatz. Der geometrische Ort eines Punktes P, für dessen Verbindungslinien mit den Eckpunkten A und B eines Dreiecks das Verhältnis der unteren Seitenabschnitte einen bestimmten Wert hat, ist diejenige gerade Linie, welche diesen gleichen Verhältniswert liefert zwischen dem untern Abschnitt auf a und Seite b und zwischen Seite a und dem untern Abschnitt auf Seite b — oder diejenige gerade Linie, deren obere Seitenabschnitte durch die Eckpunkte äusserlich (innerlich) beide ebenso geteilt werden, wie sie selbst die dritte Seite AB innerlich (äusserlich) teilt.

Aufgabe 128. Man soll in Figur 64 den wirklichen Wert des Verhältnisses der durch AP und BF abgeschnittenen unteren Seitenabschnitte nachweisen.

Erkl. 346. Schon in Erkl. 153 ist allgemein der Wert:

$$AE : BD = mb : na$$

angegeben, welcher für Punkt F entsteht; und nach Aufgabe 127 gilt dieser für alle Punkte

Auflösung. Nach Erkl. 345 ist:

$$r : s = (m \cdot b) : (n \cdot a).$$

Nun ist in Figur 64 der Wert $m : n = 3 : 1$ gewählt, und $b : a$ verhält sich nahezu wie $3 : 4$, folglich ist:

$$r : s = AE_3 : BD_3 = AE_2 : BD_2 = AC : BX$$
$$= AE_1 : BD_1 = AY : BC = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{4} = 9 : 4.$$

P der Linie PXY. In der That ist für alle Fälle sowohl der Figur I als II jede Strecke AE bezw. AC oder AY nahezu $2\frac{1}{4}$ mal so gross, als die zugehörige Strecke BD bezw. BX oder BC.

Aufgabe 129. Man soll für die in Fig. 64 vorliegenden Transversalen PXY den wirklichen Wert der nach dem Satze des Menelaos gleichgrossen Produkte aufstellen.

Erkl. 347. Allgemein wäre:

$$AF = \frac{m}{m+n}\cdot c,\ BF = \frac{n}{m+n}\cdot c,$$

$$BX = \frac{bs}{r},\ CX = \frac{ar-bs}{r},\ CY = \frac{ar-bs}{s},$$

$$YA = \frac{ar}{s};$$

also:

$$AF\cdot BX\cdot CY = \frac{mc}{m+n}\cdot\frac{bs}{r}\cdot\frac{ar-bs}{s}$$

$$= FB\cdot XC\cdot YA = \frac{nc}{m+n}\cdot\frac{ar-bs}{r}\cdot\frac{ar}{s},$$

beides

$$= \frac{m}{m+n}\cdot\frac{ar-bs}{r}\cdot bc = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{ar-bs}{s}\cdot ac,$$

denn nach voriger Erkl. 346 ist:

$$\frac{m}{r}\cdot bc = \frac{n}{s}\cdot ac,$$

hervorgehend aus der Gleichung:

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}.$$

Aus dieser letztern Beziehung folgt aber auch:

$$b\cdot s = \frac{n}{m}\cdot ra.$$

Setzt man dies in vorigen Ausdrücken ein, so wird:

$$ar - bs = ar\left(1 - \frac{n}{m}\right) = \frac{m-n}{m}\cdot ar$$

$$= \frac{m-n}{n}\, bs,$$

also der ganze Ausdruck gleich $\frac{m-n}{m+n}\cdot abc$ für beide Fälle.

Auflösung. Da in Figur 64 I nach Erkl. 342:

$$AF = \frac{3}{4}c,\quad FB = \frac{1}{4}c,$$

$$BX = \frac{1}{3}a,\quad XC = \frac{2}{3}a,$$

$$CY = 2\cdot b,\quad YA = 3\cdot b,$$

so entsteht:

$$AF\cdot BX\cdot CY = \frac{3}{4}c\cdot\frac{1}{3}a\cdot 2b = FB\cdot XC\cdot YA$$

$$= \frac{1}{4}c\cdot\frac{2}{3}a\cdot 3b,$$

beides $= \frac{1}{2}a\cdot b\cdot c$.

In Figur 64 II:

$$AF = \frac{2}{3}c,\quad FB = \frac{1}{2}c,$$

$$BX = \frac{1}{3}a,\quad XC = \frac{4}{3}a,$$

$$CY = 4b,\quad YA = 3q,$$

so kommt:

$$AF\cdot BX\cdot CY = \frac{3}{2}c\cdot\frac{1}{3}a\cdot 4b = FB\cdot XC\cdot YA$$

$$= \frac{1}{2}c\cdot\frac{4}{3}a\cdot 3b$$

beides $= 2\cdot abc$.

Erkl. 348. Man beachte das auffallende Ergebnis, dass in nebenstehender Antwort für die beiden Punkte F_1 und F_2, welche zu A und B harmonisch liegen, die reciproken Faktoren $\frac{1}{2}$ bezw. 2 zum Produkt abc auftreten. Dasselbe entsteht im vorstehenden allgemeinen Ausdruck, da für äussere statt innere Teilung nur die Grösse n ihr Zeichen wechselt, also für F_1 bleibt $\frac{m-n}{m+n}\cdot abc$, für F_2 aber

$$\frac{m+n}{m-n}\cdot abc.$$

Aufgabe 130. Man soll für einen beliebig gegebenen Punkt F auf AB diejenige Linie XY konstruieren, auf welcher Punkt F hin und her auf FXY verschoben werden kann, ohne dass das Verhältnis der entstehenden unteren Seitenabschnitte eine Aenderung erfährt.

Auflösung. Durch die Lage des Punktes F ist bestimmt das Teilungsverhältnis $m:n$ auf AB. Daraus lässt sich berechnen das gleichbleibende Verhältnis $r:s = mb:na$

Erkl. 849. In Antwort der Frage 29 des VI. Teiles dieses Lehrbuches sind eine ganze Reihe von Auflösungen der Aufgabe gegeben, eine Strecke AY zu konstruieren, für welche $AY : b = m : n$. (Man kann z. B. BF von A aus auf AB antragen gleich AF', verbindet $F'C$ und zieht dazu die Parallele durch F, so trifft diese AC in Y.)

der unteren Seitenabschnitte. Konstruiert man dann die Strecke:

$$AY = \frac{r}{s} \cdot a = \frac{m}{n} \cdot b$$

oder die Strecke:

$$BX = \frac{s}{r} \cdot b = \frac{n}{m} \cdot a,$$

so erhält man sofort den Punkt Y oder den Punkt X, mit welchem man F zu verbinden hat, um die gesuchte Linie zu erhalten.

Aufgabe 131. Man soll durch einen gegebenen Punkt F auf einer Dreiecksseite AB eine Linie ziehen, so dass das Produkt der auf den anderen Seiten gebildeten unteren Abschnitte gleich dem Produkt dieser beiden ganzen Dreiecksseiten wird.

Erkl. 850. Bei der Art und Weise, wie nebenstehende Auflösung dieser Aufgabe sich an die vorhergehenden Aufgaben anschliesst, muss eigentlich noch bewiesen werden, dass die Punkte F, X, Y auf einer Geraden liegen. Dies folgt aber aus der Anwendung des Satzes 21 a, denn für die drei Teilpunkte F, X, Y ist:

$$AF = \frac{m}{m+n} \cdot c, \qquad BF = \frac{n}{m+n} \cdot c,$$

$$BX = \frac{n}{m} \cdot a, \quad XC = a - \frac{n}{m} \cdot a = \frac{m-n}{m} \cdot a,$$

$$AY = \frac{m}{n} \cdot b, \quad CY = \frac{m}{n} \cdot b - b = \frac{m-n}{n} \cdot b,$$

also:

$$AF \cdot BX \cdot CY = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot abc$$
$$= FB \cdot XC \cdot YA,$$

beides gleich:

$$\frac{m-n}{m+n} \cdot abc,$$

folglich liegen X, Y, F in derselben geraden Linie.

Auflösung. Die gesuchte Linie ist genau dieselbe, wie jene in voriger Aufgabe. Wenn Punkt F die Linie AB teilt im Verhältnis $m : n$, so sind die gesuchten Abschnitte dieser Linie:

$$AY = \frac{m}{n} \cdot b, \quad BX = \frac{n}{m} \cdot a.$$

Und für diese ist:

$$AY \cdot BX = \frac{m}{n} \cdot b \frac{n}{m} \cdot a = a \cdot b$$

(vergl. Erkl. 350).

Aufgabe 132. Wie gestalten sich die letzten fünf Aufgaben, wenn F Mittelpunkt von AB ist?

Erkl. 851. Zieht man durch den Eckpunkt C irgend eine andere Ecktransversale, oder durch den Mittelpunkt von AB irgend eine andere Transversale, verbindet deren Punkte der Reihe nach mit A und B, und bildet das Verhältnis der so entstehenden unteren Seitenabschnitte AE und BD, so liefert jeder andere Punkt einen andern Wert dieses Verhältnisses; insbesondere entstehen für Punkte vor und nach dem Schnittpunkt F mit c verschiedene Werte dieses Verhältnisses: die Schwerlinie allein bildet die nebenstehend angegebene Ausnahme.

Auflösung. Wird F Mittelpunkt von AB, also CF in Figur 25 und 26, sowie XY in Figur 64 Schwerlinie des Dreiecks, so erhält man folgende Reihe von Ergebnissen:

1) Die Schwerlinie ist die einzige Ecktransversale des Dreiecks, für deren Punkte die durch Verbindungslinien mit den Eckpunkten A und B auf den Seiten a und b entstehenden unteren Seitenabschnitte AE und BD stets (auch beim Durchgang des Punktes P durch AB vor und nachher) denselben Verhältniswert behalten.

Erkl. 352. $m:n$ ist das Teilungsverhältnis der Seite c durch die Ecktransversale, $r:s$ das Verhältnis der unteren Seitenabschnitte, also $r:s = AE:BD$. Die Verbindungslinien der Punkte D und E in einem allgemeinen Falle bilden ein sog. Strahlenbüschel zweiter Ordnung: und dieses geht nur für die Schwerlinie über in das Strahlenbüschel erster Ordnung, bestehend aus den sämtlichen Parallelen zur Seite c.

Erkl. 353. Zieht man durch den Mittelpunkt von AB beliebige Transversalen und bildet das Produkt der von denselben gelieferten unteren Seitenabschnitte, so entsteht immer ein anderer Wert. Und wie für jeden andern Punkt der Grundseite nach Aufgabe 131 eine besondere Linie besteht, welche dieses Produkt gleich dem Produkt der Seiten ergibt, ebenso ist für den Mittelpunkt diese besondere Linie die Schwerlinie.

Erkl. 354. Man erkennt, dass die Schwerlinie sowohl für den Satz von Menelaos, als auch für den von Ceva einen besonderen Fall liefert: Im erstern Fall liefert sie als Ecktransversale den Wert Null der gleichen Produkte, im letztern Falle liefert jeder ihrer Punkte einen leicht übersehbaren Wert der gleichen Produkte. Bezeichnet nämlich v die Verhältniszahl, nach der die Seiten a und b geteilt werden, nämlich $BD:DC = v$, also wegen der äussern Teilung $AE:EC = -v$, so wird:

$$BD = \frac{a \cdot v}{v+1}, \quad DC = \frac{a}{v+1};$$

$$AE = \frac{v}{1-v} \cdot b, \quad EC = \frac{1}{1-v} \cdot b.$$

Da also noch $AF = FB = \frac{c}{2}$, so wird:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA$$

$$= \frac{c}{2} \cdot \frac{a \cdot v}{(v+1)} \cdot \frac{b}{(-v+1)} = \frac{abc}{2} \cdot \frac{v}{1-v^2}.$$

2) Der Wert dieses Verhältnisses ist:

$$AE:BD = b:a$$

für alle Punkte P der Schwerlinie, denn da $m = n$, so ist:

$$\frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}.$$

Es ist daher nicht nur:

$$AE:BD = b:a,$$

sondern auch wegen $a:BD = b:AE$:

$$(a - BD):a = (b - AE):b,$$

d. h. auch:

$$CE:BD = b:a,$$

also ist die Verbindungslinie ED stets parallel AB.

3) Der Wert des Produktes im Satze des Menelaos ist für die Schwerlinie Null (entsprechend der Antwort der Frage 52), denn $\frac{m-n}{m+n} \cdot abc = 0$, sowie $m = n$.

4) Für den Seitenmittelpunkt ist die Schwerlinie die einzige Linie, auf welcher ein Punkt P beliebig (auch hin und her über F) verschoben werden kann, ohne dass das Verhältnis der durch Verbindungslinien mit A und B gebildeten unteren Seitenabschnitte eine Aenderung erfährt.

5) Für den Seitenmittelpunkt ist die Schwerlinie diejenige Linie, für welche das Produkt ihrer unteren Seitenabschnitte gleich dem Produkt der beiden Seiten selbst ist — denn diese Abschnitte, werden gleich den Seiten selbst.

Aufgabe 133. Man bestätige an der allgemeinen Formel der Antwort der Frage 58 die Ausnahmefälle der Sätze von Menelaos und Ceva in den Antworten der Fragen 52 und 55.

Auflösung. In der Formel:

$$\frac{uv}{(u \pm 1)(v \pm 1)(uv \pm 1)} \cdot abc$$

treten Ausnahmefälle ein, wenn u oder $v = 0$ oder ∞ oder gleich -1 sind. Denn im ersten Falle wird der ganze Ausdruck 0 oder ∞, im letzten ebenfalls ∞. Das sind aber gerade die in den Antworten der Fragen 52 und 55 angegebenen Fälle. Für eine Parallele zu einer Dreieckseite wird das Teilungsverhältnis gleich -1 wegen des ∞ fernen Schnittpunktes. Für einen Eckpunkt (Menelaos) oder Punkt der Seite selbst (Ceva) wird u oder $v = 0$ bezw. ∞, also tritt der andere Ausnahmefall ein.

Erkl. 355. Bei ziffermässigen Ausrechnungen der Formeln in Antwort der Frage 58 und Erkl. 165 hat man stets auf das Vorzeichen der Verhältniszahlen u und v zu achten, wie solches in Erkl. 161 übersichtlich dargestellt ist.

Innere Teilung einer Seite liefert positives Vorzeichen. Je nachdem man den Satz des Menelaos oder des Ceva ansetzt, wird dann die Teilungsart und damit das Vorzeichen für die beiden anderen Seiten gleichartig oder entgegengesetzt (vergl. Sätze 23).

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 134. Eine Transversale teilt eine Seite wie $1:n$, wie teilt sie die anderen Seiten?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 124.

Aufgabe 135. Dieselbe Aufgabe für eine Transversale, die zwei Seiten im Verhältnis $1:n$ teilt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 124 und Erkl. 339.

Aufgabe 136. Eine Ecktransversale teile eine Seite wie $1:n$. Wie werden die anderen Seiten durch die Ecktransversalen durch Punkte der ersten Transversale geteilt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 126.

Aufgabe 137. Man zeichne eine Linie nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 126 und Erkl. 341.

Aufgabe 138. Man suche den geometrischen Ort für einen Punkt, von dessen Ecktransversalen auf den anderen Seiten untere Abschnitte im Verhältnis $m:n$ gebildet werden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgaben 127 und 128.

Aufgabe 139. Man bestimme den Wert des Produktes nach Menelaos, wenn:

$$m:n = 3:4, \quad r:s = 2:3.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 129.

Aufgabe 140. Man bestätige Aufgabe 124 an den Formeln der Erkl. 354.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 133 und Erkl. 354.

---

6) Aufgaben über die Anwendungen der Sätze von Menelaos und Ceva.

(Zu Abschnitt 7.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 141. Man soll mittels des Satzes von Ceva beweisen, dass die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Erkl. 356. Der in Antwort der Frage 64 ausgesprochene Satz 24 ist nur ein ganz besonderer Fall des Satzes in Aufgabe 124. Denn was von jeglichem Strahl durch die Seitenmitte gilt, das gilt auch für die Mittelsenkrechte.

Auflösung. Um die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks JKL (siehe Figur 65) zu untersuchen, verbindet man die Mittelpunkte ABC der Seiten durch drei Gerade. Diese Geraden sind dann parallel den Gegenseiten, also sind die vorigen Mittelsenkrechten des Dreiecks JKL auch jetzt senkrecht auf den

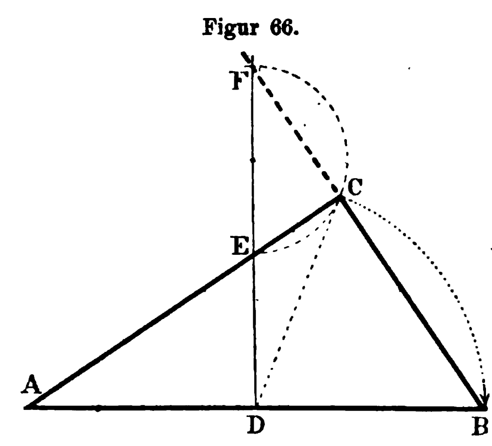
Die nebenstehende Ableitung ist genau die entgegengesetzte zu jener, mittels deren im IV. Teile dieses Lehrbuches das Bestehen des Höhenpunktes bewiesen wurde. Dort folgt das Bestehen des Höhenpunktes aus dem des Zentrums der Seiten, hier umgekehrt.

Seiten des Dreiecks ABC. Da sie aber jetzt von den Punkten ABC ausgehen, so sind sie Höhen dieses Dreiecks. Für diese ist aber in Antwort der Frage 62 auf Grund des Satzes von Ceva bewiesen, dass sie durch einen Punkt gehen, also gehen auch die Mittelsenkrechten des Dreiecks JKL, da sie dieselben Linien sind, durch einen Punkt.

Figur 65.

Aufgabe 142. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, von welchem die auf der Mittelsenkrechten der Hypotenuse durch die Katheten gebildeten Abschnitte gegeben sind.

Figur 66.



Erkl. 857. Es dient zur Vereinfachung der Aufgabe, gerade den Halbkreis über EF zu wählen. Jeder Kreis durch die Punkte E und F würde zwar die Tangente $\frac{c}{2}$ liefern. Aber der Halbkreis liefert auch zugleich die Ecke C selbst, während andernfalls erst der Punkt C als Schnittpunkt der Linien AE und DF mit dem Halbkreis über AB erhalten würde.

Erkl. 858. Für die anderen Mittelsenkrechten des rechtwinkligen Dreiecks würde dieselbe

Auflösung. Analysis. Angenommen ABC in Figur 66 sei das verlangte Dreieck, also DEF die gegebenen Stücke. Dann ist wegen gleicher Winkel:

$$\triangle ADE \sim FDB,$$

also:

$$AD : DE = FD : DB,$$

oder:

$$AD \cdot DB = DE \cdot DF.$$

Nun ist aber:

$$AD = DB = \frac{c}{2},$$

also:

$$DE \cdot DF = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Demnach erhält man $\frac{c}{2}$ als mittlere geometrische Proportionale der Strecken DE und DF.

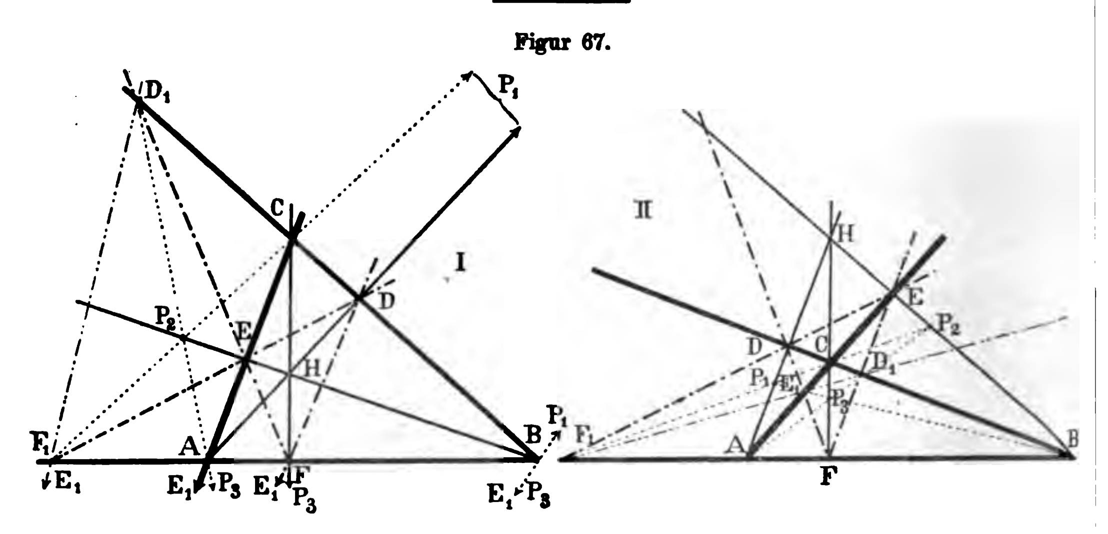
Konstruktion. Errichte den Halbkreis über EF, ziehe an denselben die Tangente DC von D aus, so ist:

$$DC^2 = DE \cdot DF = DB = DA.$$

Beweis. Da $\sphericalangle ECF$ Peripheriewinkel über dem Halbkreis ist, so ist der Winkel ein Rechter, also ABC ein rechtwinkliges Dreieck, und DEF seine Mittelsenkrechte.

Aufgabe unbestimmt, da der Abstand EF stets unendlich gross ist und folglich DE für viele Dreiecke gleich sein kann.

Figur 67.



Aufgabe 143. Man bestimme den wirklichen Wert der Menelaosschen Produkte für die Seiten des Höhenfusspunktedreiecks eines Dreiecks.

Erkl. 859. Nach den in Antwort der Frage 63 mitgeteilten Werten wird:

$$p_c - q_c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$
$$= \frac{1}{2c}(a^2 - b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2)$$
$$= \frac{2a^2 - 2b^2}{2c} = \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

Entsprechend entsteht für die Seite EF der Wert:

$$\frac{a}{p_a - q_a} \cdot p_a p_b p_c = \frac{a^2}{b^2 - c^2} \cdot p_a p_b p_c$$
$$= \frac{a}{8bc(b^2 - c^2)}(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)$$

und für Seite FD der Wert:

$$\frac{b}{p_b - q_b} \cdot p_a p_b p_c = \frac{b^2}{c^2 - a^2} \cdot p_a p_b p_c$$
$$= \frac{b}{8ca(c^2 - a^2)}(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2).$$

Auflösung. Von den Seiten des Höhenfusspunktedreiecks DEF in Figur 67 wird die Seite des Dreiecks ABC geteilt im Verhältnis $p:q$ innen und aussen, also entstehen die Teilstrecken durch Multiplikation der Seiten mit $\frac{p}{p \pm q}$ und $\frac{q}{p \pm q}$, je nachdem innere oder äussere Teilung stattfindet. Daher ist z. B. für DE das Produkt:

$$AF_1 \cdot BD \cdot CE = BF_1 \cdot CD \cdot AE$$
$$\frac{q_c c}{p_c - q_c} \cdot q_a \cdot q_b = \frac{p_c \cdot c}{p_c - q_c} \cdot p_a \cdot p_b,$$

also gleich:

$$p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot \frac{c}{p_c - q_c} = p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot \frac{c^2}{(a^2 - b^2)}$$
$$= \frac{c}{8ab(a^2 - b^2)}(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2).$$

Aufgabe 144. Man beweise, dass ein beliebiger Punkt einer Schwerlinie solche Ecktransversalen liefert, deren Schnittpunkte auf einer Parallelen zur Grundseite liegen.

Auflösung. Nach dem Satze in Aufgabe 126 müssen die Teilstrecken auf beiden

Erkl. 360. Man kann die nebenstehende Ausführung dazu benützen, um eine gegebene Strecke in eine verlangte Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.

geschnittenen Seiten gleiches Verhältnis haben, also sind die Verbindungslinien ihrer Endpunkte parallel.

Aufgabe 145. Man soll den Satz 19 mittels des Satzes von Menelaos beweisen.

Erkl. 361. Statt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hätte man ebensowohl das Dreieck $B_1B_2B_3$ oder auch $C_1C_2C_3$ wählen können; denn die drei Seiten jedes dieser Dreiecke gehen durch die drei Punkte $S_1S_2S_3$.

Und ebenso wie im nebenstehenden:

$$A_1S_3\cdot A_2S_1\cdot A_3S_2 = A_2S_3\cdot A_3S_1\cdot A_1S_2,$$

würde auch entstanden sein:

$$B_1S_3\cdot B_2S_1\cdot B_3S_2 = B_2S_3\cdot B_3S_1\cdot B_1S_2$$

oder:

$$C_1S_3\cdot C_2S_1\cdot C_3S_2 = C_2S_3\cdot C_3S_1\cdot C_1S_2.$$

Erkl. 362. Für jedes der Dreiecke $A_1A_2A_3$ oder $B_1B_2B_3$ und $C_1C_2C_3$ sind in Figur 56 die Punkte S_1S_2 innere Punkte, S_3 ein äusserer Punkt. Also gelten jedesmal die Voraussetzungen des Satzes 21a bezw. 23a,

Auflösung. In Figur 56 und 57 sind die drei Aehnlichkeitspunkte $S_1S_2S_3$ anzusehen als Punkte auf den Seiten (bezw. deren Verlängerungen) des Dreiecks $A_1A_2A_3$. Nun gelten wegen jedes einzelnen dieser Aehnlichkeitspunkte die Proportionen:

$$A_1S_3 : A_2S_3 = c_1 : c_2,\quad A_2S_1 : A_3S_1 = c_2 : c_3,$$
$$A_3S_2 : A_1S_2 = c_3 : c_1.$$

Durch gliedweise Multiplikation dieser drei Proportionen entsteht:

$$A_1S_3\cdot A_2S_1\cdot A_3S_2 : A_2S_3\cdot A_3S_1\cdot A_1S_2$$
$$= c_1\cdot c_2\cdot c_3 : c_1\cdot c_2\cdot c_3 = 1,$$

also:

$$A_1S_3\cdot A_2S_1\cdot A_3S_2 = A_2S_3\cdot A_3S_1\cdot A_1S_2.$$

Demnach sind $S_1S_2S_3$ drei Punkte auf den Verlängerungen oder zwei innere und ein äusserer Punkt auf den Seiten des Dreiecks ABC, die auf derselben Geraden liegen.

Aufgabe 146. Man soll nachweisen, dass immer für zwei Punkte der Ebene und auch immer für zwei Gerade derselben der gleiche Wert des Produktes nach den Sätzen von Menelaos und Ceva entsteht.

Erkl. 363. Das Teilverhältnis einer Strecke durch einen Punkt hat im Mittelpunkt der Strecke den Wert $+1$, im unendlich fernen Punkte den Wert -1, und geht in den Endpunkten der Strecke selbst durch die Werte 0 bezw. ∞ hindurch. Man erkennt also, dass durch Vertauschung eines Teilverhältnisses mit seinem reciproken Wert die Art der Teilung erhalten bleibt als innere bezw. äussere, nur mit symmetrischem Punkte gegen den Mittelpunkt: für $0 < x < 1$ wird $\infty > \frac{1}{x} > 1$, also P und Q zwischen den Endpunkten; und umgekehrt für $1 < x < \infty$ wird $1 > \frac{1}{x} > 0$. Anderseits liefert $0 > x > -1$ auch:

$$-\infty < \frac{1}{x} < -1$$

und umgekehrt, also P und Q ausserhalb der Endpunkte.

Auflösung. 1) Wenn in Figur 68 I und II für den Punkt P die gleichen Produkte:

$$AF_1\cdot BD\cdot CE = BF_1\cdot CD\cdot AE,$$

und für die Gerade $D_1E_1F_1$ die gleichen Produkte:

$$AF_1\cdot BD_1\cdot CE_1 = BF_1\cdot CD_1\cdot AE_1$$

entstehen, so ändert sich an allen Werten dieser Gleichungen gar nichts, wenn gleichzeitig statt jedes Teilpunktes einer Seite derjenige gewählt wird, der dieselbe Seite im reciproken Verhältnis teilt. Macht man also in Figur 68 I und II immer in entgegengesetzter Richtung $AF_2 = AF_1$, $BD_2 = BD_1$ bezw. $BD' = BD$ und $CE_2 = CE_1$, so wird offenbar das Produkt:

$$AF_1\cdot BD_1\cdot CE_1 = AF_2\cdot BD_2\cdot CE_2,$$

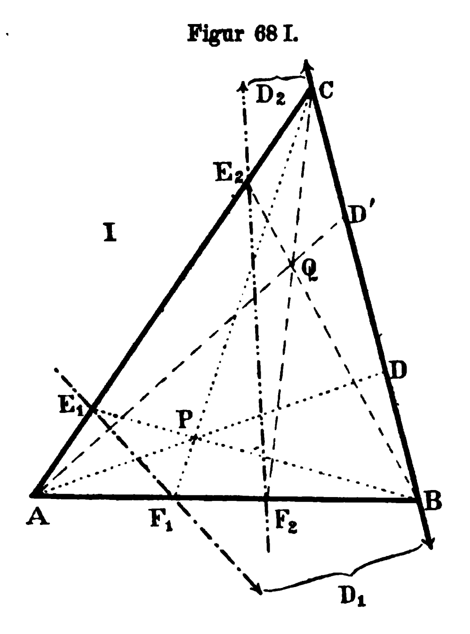
oder:

$$AF_1\cdot BD\cdot CE_1 = AF_2\cdot BD'\cdot CE_2.$$

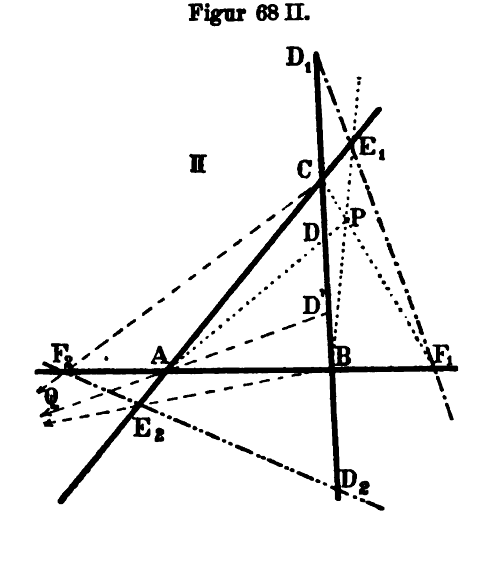
Folglich liegen auch die drei Punkte $D_2E_2F_2$ auf einer Geraden, und es gehen auch die Verbindungslinien der Punkte $D'E_2F_2$ durch denselben Punkt Q.

2) Wenn dabei der erste Punkt P ein innerer Punkt des Dreiecks war, so waren die Teilungen seiner Ecktransversalen alle

Figur 68 I.



Figur 68 II.



Erkl. 364. In Figur 68 I ist P innerhalb des Dreiecks, Q innerhalb des Dreiecks, aber für alle drei Winkelhalbierenden auf entgegengesetzten Seiten. In Figur 68 II ist P ausserhalb des Dreiecks, aber im Innenwinkelraume des Winkels A. Daher auch Punkt P ausserhalb des Dreiecks und zwar im Scheitelwinkelraume desselben Winkels A.

In Figur 68 I trifft die Gerade $D_1E_1F_1$ die Seiten b und c innen, a aussen. Daher trifft $D_2E_2F_2$ dieselben Seiten b, c innen, a aussen. In Figur 68 II aber teilt $D_1E_1F_1$ ebenso wie $D_2E_2F_2$ jede der Dreiecksseiten ausserhalb.

Erkl. 365. Es kann vorkommen, dass für einen Punkt, etwa P_0, durch irgend welche Beweisführung der gleichzeitige Durchgang dreier Ecktransversalen nachgewiesen wird. Dann ergibt die nebenstehende Ueberlegung, dass ausser diesem Punkte P_0 auch noch ein Punkt Q_0 von derselben Eigenschaft besteht.

Ein Beispiel dafür bietet die in folgender Aufgabe besprochene Figur 69. Für jene folgt der Durchgang der Geraden AD_0, BE_0, CF_0 und der entsprechenden durch die Punkte P_0, Q_1, Q_2, Q_3 auch aus den im folgenden VIII. Teile zu beweisenden Sätze von Brianchon. Und die vorliegende Ueberlegung beweist dann, dass diesen vier Punkten sich die anderen vier Punkte Q_0, P_1, P_2, P_3 entsprechend zugesellen.

drei innere Teilungen, also wird auch der zugehörige Punkt Q ein innerer Punkt (siehe Figur 69 I). War aber der Punkt P ein äusserer Punkt, so ist zu unterscheiden, ob er im Scheitelwinkelraume oder im Innenwinkelraume seines zugehörigen Dreieckswinkels gelegen ist. In beiden Fällen aber entstehen durch seine Ecktransversalen eine innere und zwei äussere Teilungen. Also entsteht auch Punkt Q durch eine innere und zwei äussere Teilungen derart, dass zwei zusammengehörige Punkte P und Q je im Innenwinkelraum und Scheitelwinkelraum desselben Dreieckswinkels gelegen sind (siehe Figur 68 II).

3) Wenn die erste Gerade g alle drei Dreieckseiten ausserhalb ihrer Seitenstrecken trifft, so muss dasselbe auch von der entsprechenden gelten (siehe Figur 68 II). Wenn dagegen die erste Gerade g nur eine Seite aussen, die zwei andern innen trifft, so muss auch die entsprechende Gerade dieselben zwei Seiten innen und dieselbe dritte Seite äusserlich teilen (siehe Figur 68 I).

4) Es bestätigt sich also auch hier, dass nie ein Punkt und eine Gerade denselben Wert des Produkts liefern können, sondern stets entgegengesetztes Vorzeichen bestehen bleibt.

Aufgabe 147. In wiefern bestätigen sich die Ergebnisse der vorigen Aufgabe in der Antwort der Frage 68?

Auflösung. In Figur 69 sind Punkte mit gleichem Produkte nach dem Satz des Ceva viermal vorhanden:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

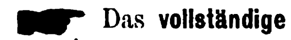
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich**, **ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium**, **das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

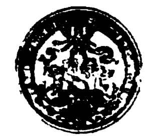
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

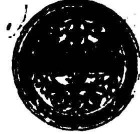
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1347. Heft.

Preis des Heftes **25 Pf.**

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1340. — Seite 145—160.
Mit 9 Figuren.





Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1340. — Seite 145—160. Mit 9 Figuren.

Inhalt:
Gelöste und ungelöste Aufgaben über die Anwendungen der Sätze von Menelaos und Ceva. — Gelöste und ungelöste Aufgaben über die Anwendung der Aehnlichkeitsmethode zur Auflösung geometrischer Aufgaben. — Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

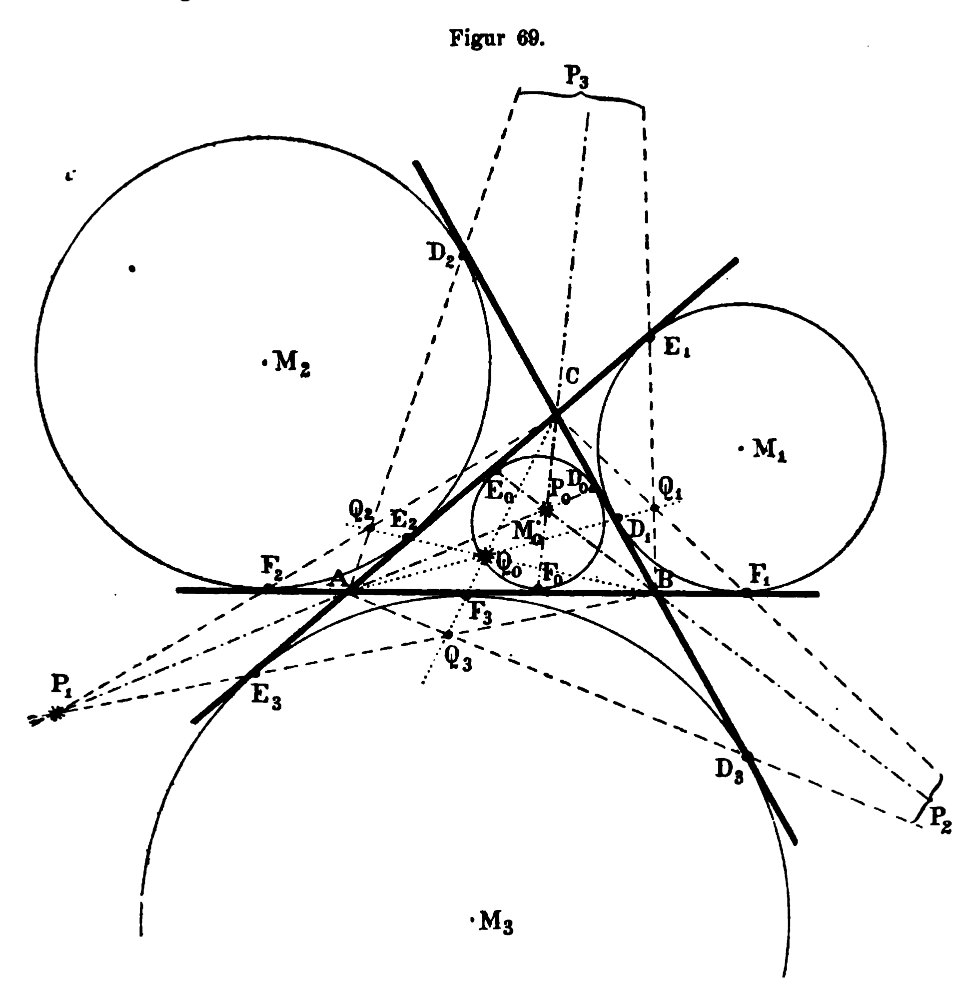
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten und belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und **mit Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 69.



Erkl. 366. Es bildet eine Bestätigung der Erkl. 364, dass P_0 und Q_0 gleichzeitig im Innern, alle anderen Punktepaare gleichzeitig ausserhalb liegen, nämlich je einer $(Q_1 Q_2 Q_3)$ im Aussenwinkelraum zweier Eckpunkte, und der dritte $(P_1 P_2 P_3)$ im Scheitelwinkelraum des dritten Eckpunktes. Ausserdem ist in Figur 69 bemerkenswert, dass von den acht Punkten PQ je zwei mit einer Ecke des Dreiecks auf derselben Geraden liegen, nämlich:

AP_0P_1 und AP_2Q_3	BP_0P_2 und BP_3Q_1
AQ_0Q_1 und AP_3Q_2	BQ_0Q_2 und BP_1Q_3

CP_0P_3 und CP_1Q_2

CQ_0Q_3 und CP_2Q_1.

P_0 und Q_0, beide im Innern des Dreiecks, mit Produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$;

P_1 und Q_1, beide ausserhalb des Dreiecks und im Winkel bezw. Scheitelwinkel A, mit Produkt $s(s-b)(s-c)$;

P_2 und Q_2, beide ausserhalb des Dreiecks und im Winkel bezw. Scheitelwinkel B, mit Produkt $s(s-c)(s-a)$;

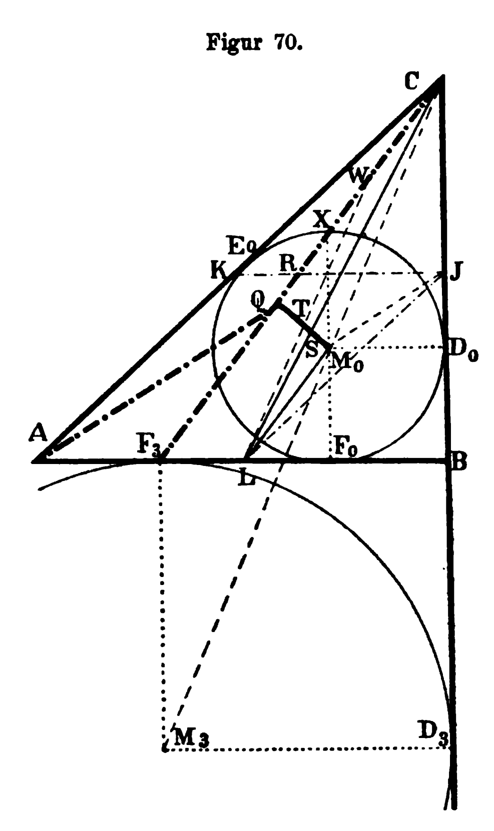
P_3 und Q_3, beide ausserhalb des Dreiecks und im Winkel bezw. Scheitelwinkel C, mit Produkt $s(s-a)(s-b)$.

Aufgabe 148. Man konstruiere und untersuche das Viereck aus einem Eckpunkte des Dreiecks, dem Mittelpunkte der Gegenseite, sowie dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises und dem Schnittpunkte der Ecktrans-

Auflösung. 1) Zur Untersuchung des Vierecks $CMLQ$ in Figur 70 zieht man den

versalen nach den Berührungspunkten der drei Ankreise.

Figur 70.



Erkl. 867. Die drei Seitenmitten des Dreiecks ABC sind im nebenstehenden bezeichnet als J (auf a), K (auf b), L (auf c). Die Buchstaben ABC bezeichnen die Eckpunkte, DEF die verschiedenen Berührungspunkte, H den Höhenpunkt, J, K, L die Seitenmitten, M die Mittelpunkte der Berührungskreise, N den Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, O den Mittelpunkt des Umkreises, P, Q die Schnittpunkte der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der In- und Ankreise, S den Schwerpunkt.

Erkl. 868. Als Ergebnis des ersten Teiles nebenstehender Auflösung kann man aussprechen: Jede Ecktransversale nach dem Berührungspunkte des gegenüberliegenden Ankreises ist parallel zur Verbindungslinie des Mittelpunktes des Inkreises mit dem Mittelpunkte derselben Dreiecksseite.

Erkl. 869. Wenn $M_0F_0 = \varrho_0 = M_0X$, so ist F_0X ein Durchmesser des Inkreises; ebenso treffen AQ und D_0M_0 einander im Endpunkte des Durchmessers M_0D_0, und M_0J ist auch parallel AQ.

Radius MF_0 des Berührungskreises; derselbe trifft die Transversale CQ in X. Dann bilden die Strecken CM_0 und CM_3 die beiden Paare ähnlicher Dreiecke $CM_0D_0 \sim CM_3D_3$ und $CM_0X \sim CM_3F_3$. Darin ist:

$$CM_0 : CM_3 = M_0D_0 : M_3D_3$$

und

$$CM_0 : CM_3 = M_0X : M_3F_3.$$

Folglich durch Division:

$$M_0D_0 : M_0X = M_3D_3 : M_3F_3.$$

Nun ist aber:

$$M_3D_3 = M_3F_3 = \varrho_3$$

und

$$M_0D_0 = M_0F_0 = \varrho_0,$$

also auch:

$$M_0X = \varrho_0 = M_0F_0.$$

Ferner ist:

$$AF_3 = BF_0 = s - c,$$

also L nicht nur Mitte von AB, sondern auch von F_0F_3. Demnach sind M_0 und L die Seitenmitten des Dreiecks F_0F_3X, folglich $M_0L \parallel F_3X$ oder $ML \parallel CQ$, d. h. das Viereck $CMLQ$ ist ein Trapez.

2) Zieht man noch die Linie JL, so ist im Dreieck JLM_0 jede Seite parallel einer Seite des Dreiecks ACQ, also:

$$\triangle JLM_0 \sim ACQ, \quad CQ : LM_0 = AC : JL.$$

Nun ist aber JL als Mittelparallele des Dreiecks ABC gleich der Hälfte von AC, also auch $CQ : LM_0 = 2 : 1$, oder in dem Trapez $CMLQ$ ist das Verhältnis der Parallelseiten gleich 2 : 1.

3) Zieht man nun noch die Diagonalen des Trapezes $CMLQ$, so schneiden diese einander in einem Punkte S und zwar so, dass (nach Satz 15 des VI. Teiles):

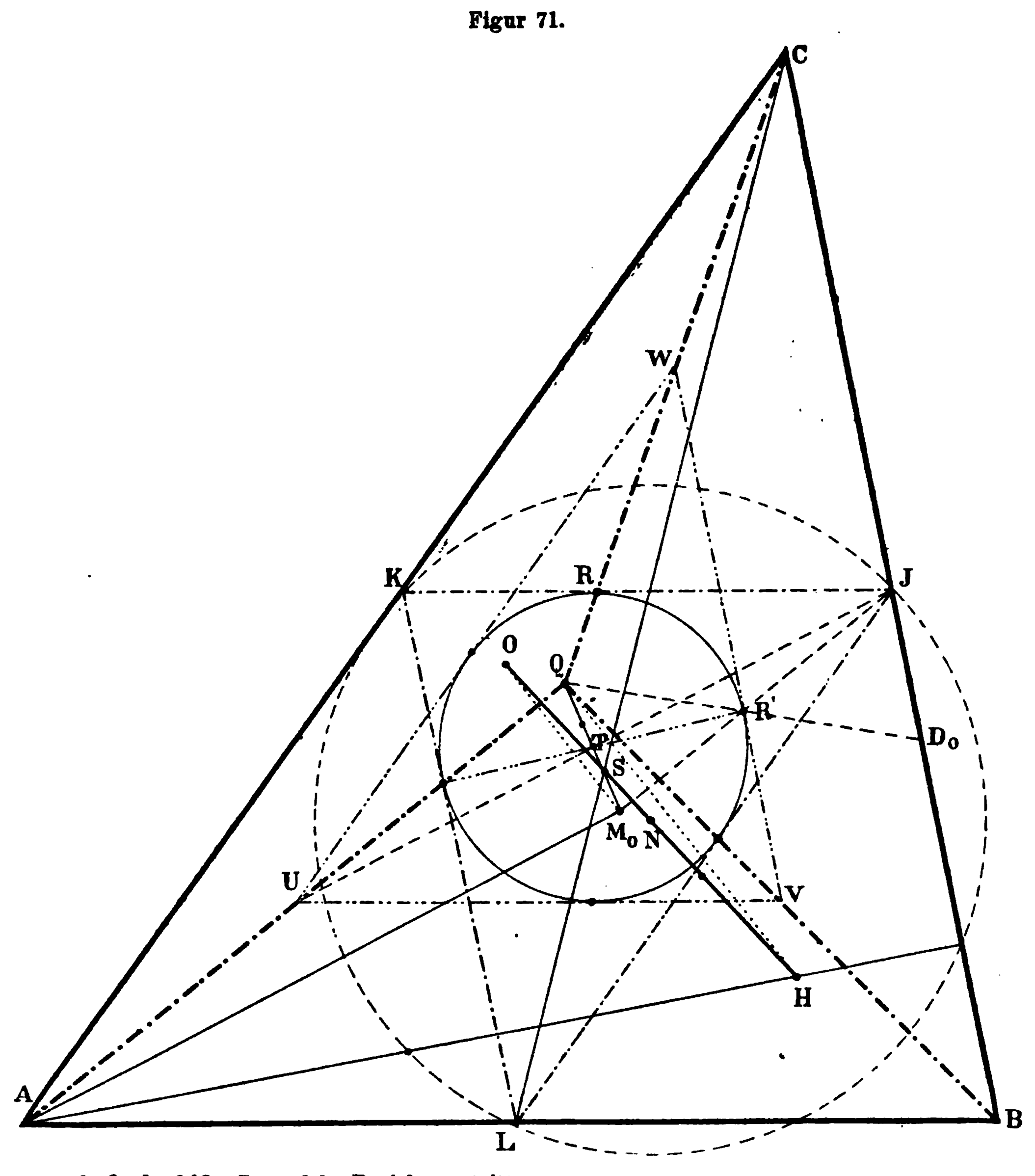
$$QS : SM_0 = CS : SL = QC : M_0L = 2 : 1.$$

Nun ist aber L Seitenmitte, also CL Schwerlinie, und deren Teilpunkt nach dem Verhältnis 2 : 1 ist der Schwerpunkt des Dreiecks. Folglich gehen die Diagonalen des Vierecks $CMLQ$ durch den Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Erkl. 870. Da im Dreieck F_3F_0X auch $M_0L = \frac{1}{2} F_3X$, und auch (nach zweitem Teil obenstehender Auflösung) $M_0L = \frac{1}{2} CQ$, so ist $F_3X = 2 \cdot M_0L = CQ$, d. h. X ist ebenso weit von C (oder von F_3) entfernt, wie Q von F_3 (oder von C).

Erkl. 871. Ebenso wie das Viereck $CMLQ$ wird auch $AMJQ$ und $BMKQ$ je ein Trapez mit Verhältnis 2 : 1 der Grundseiten und zwar alle drei mit gemeinsamer Diagonale QM und gemeinsamem Diagonalenschnittpunkt S.

Figur 71.



Aufgabe 149. In welche Beziehung tritt nach dem Vorhergehenden der Punkt Q zu den von früher bekannten vier merkwürdigen Punkten $HMNO$ des Dreiecks ABC?

Erkl. 372. Der dritte Teil nebenstehender Auflösung folgt aus Antwort der Frage 24 des VI. Teiles. Im Trapez $HMOQ$ ist:

$QT = MT = \frac{1}{2} QM, \; QS = 2 \cdot SM = \frac{2}{3} QM,$

und ebenso:

$HN = NO = \frac{1}{2} HO, \; HS = 2 \cdot SO = \frac{2}{3} HO.$

Auflösung. 1) Nach früheren Sätzen (Abschnitt C des IV. Teiles dieses Lehrbuches, besonders Antworten der Fragen 159 bis 166) liegen auf einer Geraden die Punkte OSH so, dass die Strecke OH durch S geteilt wird im Verhältnis 1 : 2, und durch N geteilt wird im Verhältnis 1 : 1.

2) Nun liegen (nach voriger Auflösung) ebenfalls auf einer Geraden die

Folglich:

$$TS = \frac{1}{6}QM \text{ und } NS = \frac{1}{6}OH,$$

also:

$$TN:QH = ST:SQ = 1:4,$$
$$TN:OM = ST:SM = 1:2.$$

Erkl. 373. Um die Bedeutung des Punktes T zu erkennen, beachte man, dass die Seiten des Dreiecks JKL der Seitenmittelpunkte parallel denen des Dreiecks ABC, und dass JTU parallel der Halbierungslinie AM_0 des Winkels A ist. Denn auch die Strecken MT und AJ bilden im Punkte S einen Winkel, auf dessen Schenkeln $TS:SM = 1:2 = JS:SA$, also $JT \parallel MA$.

Demnach sind:

$$JT \parallel AM, \quad KT \parallel BM, \quad LT \parallel CM,$$

nämlich Winkelhalbierende des Dreiecks JKL der Seitenmitten. Folglich ist T der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks JKL, also Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks.

Erkl. 374. Dass die Verbindungslinien der Seitenmitten JKL mit den Mittelpunkten UVW der oberen Abschnitte der Transversalen nach Q einander in T treffen und daselbst halbieren, folgt aus den Eigenschaften des Trapezes $AMJQ$. Da nämlich $MJ \parallel AQ$ und $MJ = \frac{1}{2}AQ$ ist, so muss $MJ = QU$ sein, wenn U Mittelpunkt von QA ist. Folglich ist $JMUQ$ ein Parallelogramm, und deshalb treffen sich die Diagonalen MQ und JU im Mittelpunkte T und halbieren einander daselbst. Ebenso halbiert MQ in T auch die Strecken KV und LW.

Erkl. 375. Dass der Inkreis des Dreiecks JKL den Punkt T als Mittelpunkt hat, folgte schon in Erkl. 373 aus der Parallelität von $JT \parallel MA$. Nun ist aber JT dieselbe Linie wie UT, also auch $UT \parallel MA$. UT aber trennt die Schenkel des Winkels VUW, die ebenfalls parallel den Schenkeln des Winkels BAC sind. Ist aber MA Winkelhalbierende des Winkels BAC, so ist auch die Parallele UT Winkelhalbierende des Winkels VUW. Ebenso ist VT als Parallele zu BM Winkelhalbierende des Winkels UVW und WT Halbierende des Winkels VWU. Also ist T Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, oder Mittelpunkt des Inkreises für das Dreieck UVW der Mittelpunkte der oberen Abschnitte der Transversalen nach Q.

Erkl. 376. Dass UVW parallel ABC ist, folgt leicht aus der Thatsache, dass UV, VW, WU der Reihe nach die Verbindungslinien der Seitenmitten der Dreiecke AQB, BQC, CQA sind. Demnach sind auch die Seiten dieses Dreiecks UVW parallel und gleichgross den Seiten des Mittendreiecks JKL (und auch denen des Dreiecks der Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte), nämlich parallel und halb so gross wie die Seiten des Dreiecks ABC selbst. Die Punkte MSQ so, dass diese Strecke MQ durch S geteilt wird im Verhältnis 1:2.

3) Folglich bilden die Geraden OH und QM einen Winkel im Punkte S, auf dessen Schenkeln sich verhält:

$$QS:SM = HS:SO = 2:1,$$

also liegen die fünf Punkte $HMOQS$ so, dass $HMOQ$ die Ecken eines Trapezes bilden, dessen Grundseiten $HQ \parallel OM$ und $HQ = 2 \cdot OM$, und dessen Diagonalen durch S gehen und einander dort teilen im Verhältnis 2:1. Die Mittelpunkte N und T dieser Diagonalen sind Mittelpunkte des Feuerbachschen Kreises bezw. des Inkreises des Dreiecks JKL; und

$$TN \parallel QH \parallel OM, \quad TN = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{4}HQ.$$

4) Betrachtet man als entsprechend zugeordnete Elemente Umkreis und Inkreis eines Dreiecks, also $O \backsim M$, so entsprechen weiter nach der gegenseitigen Zuordnung der beiden Diagonalen des Trapezes $HMOQ$ die Radien AO, BO, CO des Umkreises den winkelhalbierenden Strecken AM, BM, CM; dem Punkte S derselbe Punkt S, also die Schwerlinie sich selbst zugeordnet; dem Punkte H der Punkt Q, also den Höhen AH, BH, CH die Transversalen AQ, BQ, CQ. Den Mittelpunkten der oberen Höhenabschnitte und deren Verbindungslinien mit den Seitenmitten entsprechen die Mittelpunkte der oberen Abschnitte der Transversalen AQ, BQ, CQ und deren Verbindungslinien mit der gegenüberliegenden Seitenmitte, dem gemeinsamen Schnittpunkte und Halbierungspunkte N der ersteren Verbindungslinien, als Mittelpunkt der Strecke HO, entspricht der gemeinsame Schnittpunkt und Halbierungspunkt T der letzteren Verbindungslinien, als Mittelpunkt der Strecke QM. Dem Feuerbachschen Kreise um N als gemeinsamem Umkreis des Dreiecks der Seitenmitten und der Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte entspricht der Kreis um T als gemeinsamer Inkreis des Dreiecks der Seitenmitten (als selbstentsprechend) und der Mittelpunkte der oberen Abschnitte der Ecktransversalen nach Q; dem Schnittpunkte des Feuerbachschen Kreises, nämlich dem Mittelpunkte der Seiten und den Mittelpunkten der oberen Höhenabschnitte entsprechen die Berührungspunkte des Kreises um T, nämlich die Schnittpunkte der Ecktransversalen nach Q mit den Seiten des Mittendreiecks bezw. die Schnittpunkte der Seiten des

Dreiecke UVW und JKL sind kongruent und in perspektivischer Lage mit Punkt T als Mittelpunkt der zentrischen Symmetrie und deshalb gemeinsamem Mittelpunkt des Inkreises.

Erkl. 377. Die Lage der Berührungspunkte des Inkreises um T für die Dreiecke JKL und UVW findet man folgendermassen: Nach Erkl. 370 ist in Figur 70 $QF_3 = XC$, also fällt der Mittelpunkt R von XQ zusammen mit dem Mittelpunkte R von CF_3, der ausgeschnitten wird durch die Mittelparallele JK des Dreiecks ABC. Demnach sind im Dreieck QMX die Punkte R und T Seitenmitten, RT Mittelparallele, also $RT \parallel XMF_0$ oder RT ebenso wie XMF_0 senkrecht auf AB, auf JK und auf UV. Demnach sind auch in Figur 71 die beiderseitigen Fusspunkte dieser drei Senkrechten wie $R'T$ auf den Dreiecksseiten von JKL und UVW jeweils der Berührungspunkt des Inkreises. Wegen der zu T ebenfalls zentrischsymmetrischen Parallelen:

$$LK \parallel WV \text{ und } JM \parallel UQ$$

ist der Berührungspunkt R' auf WV zugleich der Schnittpunkt von WV mit JM, so dass die Berührungspunkte der Dreiecke JKL und UVW je entgegengesetzte Endpunkte derselben drei Durchmesser durch T sind (auch wegen der zentrischen Symmetrie).

Erkl. 378. Im Dreieck ABQ der Figur 70 ist nun aber UV Mittelparallele, schneidet also QF_0 im Mittelpunkte, und im Dreieck XQF_0 der Figur 70 ist RT Mittelparallele, schneidet daher QF_0 ebenfalls im Mittelpunkte. Also müssen auch in Figur 71 dieselben drei Linien QD_0, $R'T$ und WV durch denselben Punkt gehen, nämlich den Mittelpunkt von QD_0, d. h. QD_0 geht durch den Schnittpunkt von WV und $R'T$ und MJ und wird dort halbiert.

Dreiecks der Mittelpunkte der oberen Transversalenabschnitte sowohl mit den Verbindungslinien der Seitenmitten mit M, als auch mit jenen der Berührungspunkte des Inkreises mit Q.

5) Ein weiterer Gesichtspunkt der entsprechenden Zuordnung unter den fünf Punkten $HMOQS$ ist derjenige, dass man dem Dreieck ABC das Dreieck der Seitenmitten JKL zuordnet, wobei S als selbstentsprechender Punkt gemeinsamer Schwerpunkt und innerer Aehnlichkeitspunkt wird, die Strahlen durch S zu Aehnlichkeitsstrahlen, die alle durch S geteilt werden im Verhältnis $2:1$.

In dieser Hinsicht entsprechen sich: der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC dem Höhenpunkte O des Mittendreiecks; letzterer Punkt O als Mittelpunkt des Umkreises von ABC dem Mittelpunkte N des (Feuerbachschen) Umkreises von JKL, da:

$$SN = \frac{1}{2} SQ.$$

Ebenso, wie nun Q für ABC der Schnittpunkt der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise ist, so muss auch M derselbe Schnittpunkt der Ecktransversalen von JKL nach den Berührungspunkten der Ankreise des Dreiecks JKL sein.

Demselben Punkte M als Mittelpunkt des Inkreises von ABC entspricht der Punkt T als Mittelpunkt des Inkreises von JKL. Aus dieser Art der Anschauung folgt ohne alle Zwischenbetrachtung, dass:

$$MJ \parallel AQ \text{ und } MJ = \frac{1}{2} AQ,$$

sowie:

$$JT \parallel AM \text{ und } JT = \frac{1}{2} AM,$$

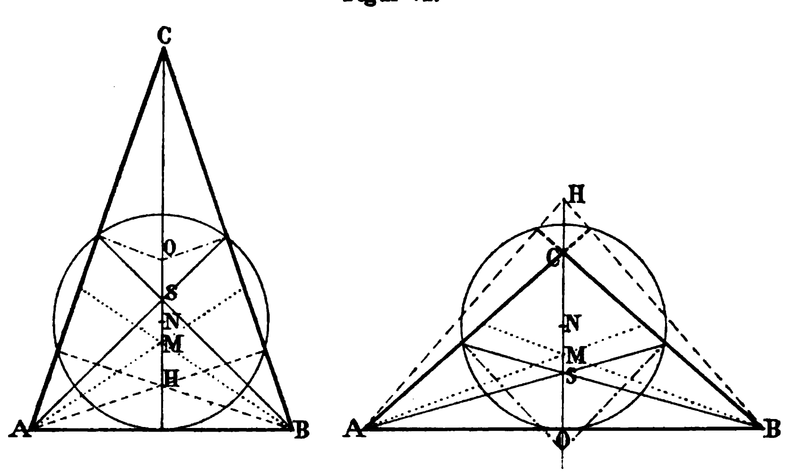
dass die Radien der Um-, In-, Ankreise von J, K, L halb so gross sind, als jene von A, B, C, u. s. w.

Aufgabe 150. Man soll die Lage der Punkte P und Q in Figur 69 und 71 für die besonderen Dreiecke untersuchen.

Erkl. 379. Die Figuren 72 und 73 sind dem IV. Teile dieses Lehrbuches entnommen, woselbst die gegenseitige Lage der sog. vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks und des Feuerbachschen Kreises behandelt werden. Da die Punkte T, Q, P zu den genannten in die einfachen Beziehungen treten, welche in voriger Aufgabe besprochen wurden, so kann es dem Studierenden überlassen bleiben, für möglichst verschiedene Fälle von Dreiecken die zugehörigen Figuren selbst zu zeichnen.

Auflösung. 1) Ist ein Dreieck gleichschenklig mit Spitze C, so fallen die Geraden CF_0 und CF_3 zusammen, so dass die Punkte P_0, Q_0, sowie P_3 und Q_3 mit M_0, M_3 auf diese Symmetrieachse zu liegen kommen. Die Punkte P_1, P_2, sowie Q_1, Q_2 werden je entsprechend symmetrische Punkte beiderseits der Achse. Auf der Achse liegen nach früheren Betrachtungen auch die Punkte O, M, H, S, N; folglich fallen die beiden Diagonalen des Trapezes $HMOQ$ in Figur 71 auf die gleiche Linie zusammen. Und man

Figur 72.



Erkl. 380. Während die Punkte O und H für das stumpfwinklige Dreieck ausserhalb des Umrings, für das rechtwinklige auf den Umring zu liegen kommen, so müssen die Punkte S und M stets im Innern bleiben. Letzteres gilt nach der Natur ihrer Entstehung ebenfalls für die Punkte P, Q, T. Man kann also umgekehrt den Schluss ziehen, dass S und M sogar stets so weit ins Innere des Dreiecks fallen müssen, dass auch die Verlängerung von MS um das Doppelte über S hinaus noch einen im Innern liegenden Punkt Q geben muss.

Erkl. 381. Man beachte, dass beim Erscheinen einer Symmetrieachse des Dreiecks die Strecken OH und MQ nicht mit gleichartigen, sondern mit entgegengesetzten Richtungen zur Deckung gelangen, dass also stets zur Deckung gelangen die Richtungen SM, SN, SH und entgegengesetzt die Richtungen SQ, ST, SO; im rechtwinkligen Dreieck stets Q und T auf diejenige Seite der Schwerlinie, welche die grössere Kathete enthält, gegenüber von M.

kann daher in den Figuren 72 die Lage der Punkte Q und T leicht erkennen, wenn man auf der Achse HO die Strecken anträgt:

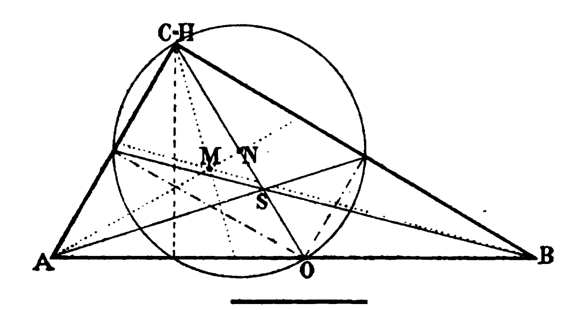
$$SQ = 2SM, \quad ST = \frac{1}{2}SM.$$

2) Im gleichseitigen Dreieck fallen mit allen Punkten H, O, M, N, S auch die drei Punkte P_0, Q_0, T in den Mittelpunkt des Dreiecks: Umkreis, Inkreis, Neunpunktekreis für sämtliche Dreiecke ABC, JKL, UVW werden konzentrisch und zum Teil auch identisch.

3) Im rechtwinkligen Dreieck kann man ebenfalls aus Figur 73 entnehmen, wohin die Punkte T und Q zu liegen kommen, indem man wie oben die Strecke MS über S hinaus um die Hälfte verlängert bis T, und um ihr Doppeltes verlängert bis Q.

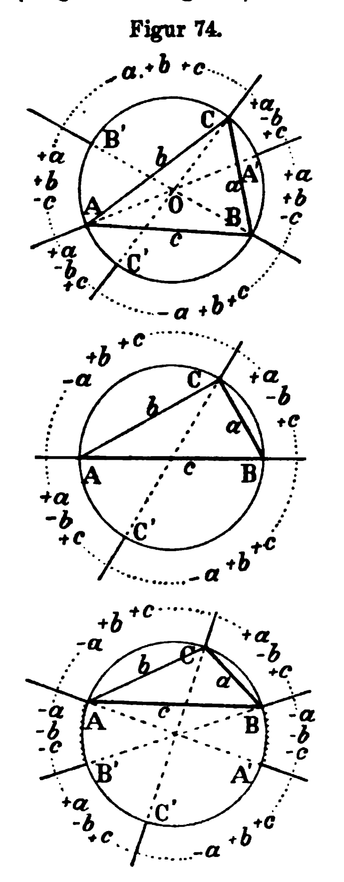
Die Strecke OH ist in Figur 71 die grössere. Nur wenn ein Winkel des Dreiecks sehr klein wird (wie $\sphericalangle\gamma$ in Figur 72 I). wird $SO < SM$, und dadurch auch die dreifache Strecke $OH < MQ$.

Figur 73.



Aufgabe 151. Man soll die verschiedenen Lagen der „Simsonschen Geraden" untersuchen (vergleiche Frage 69).

Figur 74.



Erkl. 882. In Figur 74 ist an den einzelnen Kreisbogen durch $\pm$ Zeichen angegeben, ob innere (+) oder äussere (—) Teilung einer Seite stattfindet, wenn von einem Punkte des betrachteten Kreisbogens die Senkrechte auf diese Seite gefällt wird. So bedeutet $+a-b+c$ am Bogen AC' in Figur 74 I, dass die drei Senkrechten von einem Punkte dieses Bogens auf die Seiten a, b, c, die Seite a innen, b aussen, c innen durchschneiden.

Auflösung. Die Senkrechte auf die Sehne eines Kreises trifft die Sehne in einem i n n e r n Punkte, wenn sie von einem Kreispunkte ausgeht, der auf dem kürzeren der von der Sehne ausgeschnittenen Kreisbogen liegt, oder auf dessen diametral gegenüberliegendem, d. h. zentrisch-symmetrischen Kreisbogen; dagegen wird eine Sehne in einem äussern Punkte getroffen, wenn die Senkrechte von einem solchen Kreispunkte ausgeht, der ausserhalb der beiden im Endpunkte der Sehne errichteten Senkrechten liegt. Dadurch erhält man für jede Sehne zweierlei Kreisbogen, also für die drei Seiten eines Dreiecks s e c h s e r l e i K r e i s b o g e n, deren Punkte verschiedene Lagen der Fusspunkte der Senkrechten liefern. Dabei kommt es aber, wie Figur 74 auch in der Zeichnung aufweist, nie vor, dass drei innere Punkte entstehen, und auch nur beim stumpfwinkligen Dreieck können alle drei Punkte ausserhalb der Dreiecksseiten geschnitten werden. Sonst aber hat man stets zwei innere und einen äussern Punkt.

Erkl. 888. Fig. 74 I enthält alle drei möglichen Zusammenstellungen der Seiten a, b, c zu je zwei + mit einem —, nämlich:

	BA' und AB'	CA' und AC'	BC' und CB'
+	a	a	b
+	b	c	c
—	c	b	a

Beim rechtwinkligen Dreieck dagegen kann die Hypotenuse nie aussen getroffen werden, daher fehlt dort das Paar Bogen mit — 1, und man hat nur viererlei Kreisbogen.

Beim stumpfwinkligen Dreieck wird die längste Seite nie a l l e i n aussen getroffen, sondern immer mit b e i d e n anderen Seiten zusammen. Daher dort $-a$, $-b$, $-c$, aber sonst die vier übrigen wie in den beiden anderen Fällen.

Aufgabe 152. Man soll die Sätze 28 auf die Eckpunkte der sog. E r g ä n z u n g s p a r a l l e l o g r a m m e in Figur 75 anwenden.

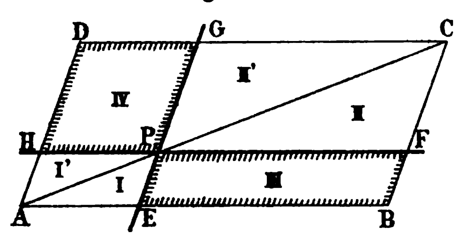
Auflösung. Sind E, F, G, H in Figur 75 die Teilpunkte der vier Seiten a, b, c, d eines Parallelogramms so ist:

$$AE = GD$$
$$EB = CG$$
$$BF = HA$$
$$CF = DH$$

also $AE \cdot BF \cdot CG \cdot DH = EB \cdot FC \cdot GD \cdot HA$.



Figur 75.



Erkl. 884. In Figur 75 ist sofort erkennbar, dass:

$$\triangle AEP \backsim PFC \backsim ABC,$$

folglich auch Parallelogramm:

$$AEPH \backsim PFCG \backsim ABCD.$$

Folglich bilden auch die zweiten Diagonalen dieser Parallelogramme gleichgrosse Winkel mit der ersten gemeinsamen, d. h. die Diagonalen EH, FG, BD sind parallel. Dies stimmt überein mit dem nebenstehenden Ergebnis, indem der ∞ ferne Punkt von BD als Schnittpunkt anzusehen ist. Für einen ausserhalb AC gelegenen Punkt P fällt diese Parallelität von selbst fort.

Folglich müssen sowohl die Verbindungslinien von EF und GH durch denselben Punkt der Diagonale AC, also auch jene von EH und FG durch denselben Punkt der Diagonale BD gehen.

Ganz dasselbe Ergebnis entsteht aber auch, wenn der Punkt P nicht auf der Diagonale AC, sondern in einem beliebigen Punkte im Innern des Parallelogramms gelegen ist.

Aufgabe 153. Man soll dieselbe Aufgabe mittels der Aehnlichkeitsmethode lösen.

Erkl. 885. Während die Auflösung der Aufgabe 152 für **j e d e n** Punkt im Innern des Parallelogramms wörtlich dieselbe blieb, gilt die nebenstehende bloss für die Figur 75 der Ergänzungsparallelogramme. Jene behält z. B. ihre Geltung für die Figuren 18, 19 **u n d** 20 im V. Teile dieses Lehrbuches; die nebenstehende Auflösung dagegen gilt für 18 und 19, **n i c h t** aber für Figur 20 daselbst.

Erkl. 886. Als eine Figur mit drei Paaren perspektivisch ähnlicher Figuren fällt die Fig. 75 auch in den Geltungsbereich des Satzes 19: Aehnlichkeitspunkt für $ABCD$ und $AEPH$ ist A, für $ABCD$ und $PFCG$ dagegen C, also muss für $AEPH$ und $PFCG$ der Aehnlichkeitspunkt auf der Verbindungslinie von A und C liegen.

Auflösung. Da in Figur 75 Parallelogramm:

$$AEPH \backsim ABCD \backsim PFCG,$$

und die Diagonale AC allen dreien gemeinsam ist, so sind je zwei dieser Parallelogramme in perspektivischer Lage, und der Aehnlichkeitspunkt liegt auf der gemeinsamen Linie AC. Durch diesen Aehnlichkeitspunkt müssen aber gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte, z. B. von E und F, H und G, d. h. **d i e s e V e r b i n d u n g s l i n i e n s c h n e i d e n e i n a n d e r a u f d e r D i a g o n a l e n** AC. Entprechende Elemente je zweier Figuren sind ferner die Diagonalen EH, FG, BD, folglich müssen wegen der perspektivischen Lage beider Figuren diese Diagonalen **p a r a l l e l** sein.

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 154. Man soll in Figur 66 $DE = EF$ setzen, und den Erfolg beobachten.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 142.

Aufgabe 155. Man bestimme den Wert des Produktes nach Menelaos für $D_1E_1F_1$ in Figur 67.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 143.

Aufgabe 156. Man bestimme den Wert des Produktes nach Ceva für die Punkte P in Figur 67.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 143.

Aufgabe 157. Man lasse einen Punkt P auf einer beliebigen Ecktransversalen sich bewegen und beobachte die Schnittpunkte der durch ihn gehenden beiden anderen Ecktransversalen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 144.

Aufgabe 158. Man wende Aufgabe 144 an zur Teilung einer Strecke in n gleiche Teile.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 144.

Aufgabe 159. Man soll das Ergebnis der Aufgabe 146 in Worte fassen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 146.

Aufgabe 160. Dieselbe Aufgabe für das Ergebnis der Auflösung der Aufgabe 147.

Andeutung Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 147.

Aufgabe 161. Man soll Erkl. 368 in anderen Werten ausdrücken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 148.

Aufgabe 162. Welches Ergebnis liefert Erkl. 370?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 148.

Aufgabe 163. Man soll den zweiten Teil der Auflösung der Aufgabe 149 in einem Satze aussprechen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 164. Dieselbe Aufgabe für den vierten Teil derselben Auflösung.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 165. Dieselbe Aufgabe für den fünften Teil derselben Auflösung.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 166. Welche allgemeine Eigenschaft ist durch Erkl. 378 bewiesen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 167. Man betrachte dasselbe Ergebnis für die Ecktransversale des Berührungspunktes des Inkreises.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 149.

Aufgabe 168. Man suche eine Anwendung des besonderen Falles der Aufgabe 152 auf das allgemeine Viereck.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 152.

Aufgabe 169. Man soll Satz 28b in anderen Worten ausdrücken.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 152.

7) Aufgaben über die Anwendung der Aehnlichkeitsmethode zur Auflösung geometrischer Aufgaben.

(Zu Abschnitt 8.)

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 170. Von einem Dreieck sei gegeben das Verhältnis der drei Höhen:

$$h_a : h_b : h_c = m : n : p,$$

und der Umfang u des Dreiecks der Höhenfusspunkte. Man soll das Dreieck konstruieren.

Erkl. 387. Man erkennt leicht, dass die Mannigfaltigkeit der Aufgaben nach vorstehender Art eine völlig unbegrenzte ist, da die Auswahl und Zusammenstellung der Bestimmungsstücke völlig willkürlich ist. Zur Bestimmung der Gestalt des Dreiecks benützt man die Winkelgrössen und Seitenverhältnisse, zur Bestimmung der Grösse die gegebene Strecke.

Erkl. 388. Auch die Beweise all dieser Aufgaben sind genau analog. Das gefundene Dreieck hat zwar nicht unmittelbar die verlangte Streckengrösse durch Abtragung erhalten, aber da in ähnlichen Dreiecken $a : a' = u : u'$ sein muss, so ist mit a auch die verlangte Grösse u sichergestellt. Der zweite Teil des Beweises über das Verhältnis der drei Höhen ändert sich je nach Wahl der Bestimmungsstücke.

Auflösung. Da in jedem Dreiecke:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

so verhalten sich die Höhen eines solchen Dreiecks, welches die Höhen des verlangten Dreiecks zu Seiten hat, wie:

$$h_a' : h_b' : h_c' = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = a : b : c,$$

also wie die Seiten des verlangten Dreiecks. Man zeichnet daher aus den Strecken m, n, p, deren Verhältnis dasselbe ist, wie jenes der Höhen, ein Dreieck; die Höhen dieses Dreiecks benützt man wieder als Seiten a', b', c' eines neuen Dreiecks; und dieses ist dem verlangten ähnlich. Man zeichnet also in demselben das Dreieck der Höhenfusspunkte, zeichnet dessen Umfang u' und konstruiert aus der Proportion $u' : u = a' : a$ die gesuchte Seite a des verlangten Dreiecks. Dieses entsteht aus Seite a mit den Winkeln des vorigen Dreiecks $a'b'c'$.

Aufgabe 171. In ein Dreieck soll ein Parallelogramm mit gemeinsamem Winkel α gezeichnet werden, dessen Seiten sich verhalten wie $m:n$, während seine Gegenecke auf der Höhe h_c liegt.

Erkl. 889. Die beiden Endpunkte von m und n liefern die Diagonale eines Parallelogramms mit Verhältnis der Seiten $m:n$ und $\sphericalangle \alpha$. Aehnlichkeitspunkt dieses Parallelogramms und des verlangten ist A, also liegen auch sämtliche Eckpunkte auf der durch A und diesen einen Diagonalenmittelpunkt gehenden Diagonalen.

Auflösung. Trägt man auf den Schenkeln b und c des Winkels α die Strecken m und n an, verbindet die Endpunkte und zieht die Ecktransversale von A durch den Mittelpunkt dieser Verbindungsstrecke, so schneidet diese die Höhe h_c im verlangten Eckpunkte des Parallelogramms.

Aufgabe 172. In ein beliebiges Dreieck soll ein anderes mit gegebenen Winkeln so eingezeichnet werden, dass eine seiner Seiten eine gegebene Richtung hat.

Auflösung. Man kann diese Aufgabe auf genau dieselbe Weise lösen, wie es in Antwort der Frage 82 mit dem gleichseitigen Dreieck geschehen ist.

Aufgabe 173. Man soll ein Fünfeck von gegebener Gestalt zeichnen, in welchem das von den Diagonalen gebildete Fünfeck einen gegebenen Flächeninhalt habe.

Erkl. 890. Die Verwandlung eines Fünfecks in ein Quadrat kann auf verschiedene Weise geschehen. Mit am kürzesten ist diejenige nach Aufgabe 257 des V. Teiles dieses Lehrbuches. Dabei macht man zunächst aus dem Fünfeck nach der gewöhnlichen Weise ein Viereck, aus diesem unmittelbar ein Rechteck durch die Mittelparallelen der Diagonalendreiecke, und zuletzt aus dem Rechteck ein Quadrat mittels der Höhe im rechtwinkligen Dreieck.

Auflösung. Man konstruiert in einem beliebigen Fünfeck von gegebener Gestalt und Seite a' das Fünfeck der Diagonalen, verwandelt dieses in ein Quadrat mit Seite s' und auch die gegebene Fläche in ein Quadrat mit Seite s. Konstruiert man dann nach der Proportion $s':s = a':a$, so hat man die Seite a des gesuchten Fünfecks. Denn das Diagonalenfünfeck dieses so erhaltenen Fünfecks erhält, wenn es in ein Quadrat verwandelt wird, die Seite s, hat also den verlangten Flächeninhalt.

Aufgabe 174. Man soll ein Viereck berechnen, von welchem jeder Winkel um die Hälfte grösser als der vorhergehende ist, und das Produkt der vier Seiten gleich einer gegebenen Grösse E.

Erkl. 891.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha+\frac{3}{2}\alpha+\frac{9}{4}\alpha+\frac{27}{8}\alpha$$

$$= \frac{27+18+12+8}{8}\alpha = \frac{65}{8}\alpha,$$

$$\text{also } \frac{65}{8}\alpha = 360, \ \alpha = \frac{8\cdot 360}{65} = \frac{8\cdot 72}{13}$$

$$= \frac{576}{13} = 44\frac{4}{13}^{0}.$$

Dann ist:

$$\beta = \frac{12\cdot 72}{13} = 66\frac{6}{13}, \ \gamma = \frac{18\cdot 72}{13} = 99\frac{9}{13},$$

$$\delta = \frac{27\cdot 72}{13} = 149\frac{7}{13}.$$

Auflösung. Sind die Winkel α, β, γ, δ, also:

$$\beta = \frac{3}{2}\alpha, \ \gamma = \frac{3}{2}\beta = \frac{9}{4}\alpha, \ \delta = \frac{3}{2}\gamma = \frac{27}{8}\alpha,$$

so weiss man, dass:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^0 = \frac{65}{8}\cdot\alpha$$

oder:

$$\alpha = 44\frac{4}{13}^{0}, \ \beta = 66\frac{6}{13}^{0}, \ \gamma = 99\frac{9}{13}^{0},$$

$$\delta = 149\frac{7}{13}^{0}.$$

Konstruiert man nun ein Dreieck mit diesen Winkeln und Seite a' und misst seine Seiten, so gibt das Produkt derselben eine Grösse e. Damit nun diese Grösse e zu E werde, setzt man:

Oder man rechnet die Hälften:

$$\frac{\alpha}{2} = 22\frac{2}{13},\quad \frac{\beta}{2} = 33\frac{3}{13},\quad \frac{\gamma}{2} = 49\frac{11}{13},$$

und addiert diese jeweils zum vorhergehenden Winkel.

Erkl. 392. Die Grösse $\sqrt[4]{\frac{E}{e}}$ ist die Grösse x der Antwort in Frage 84, mit welcher man die Längengrössen der vorläufigen Figur zu multiplizieren hat, um die der gesuchten Figur zu erhalten. Alle derartigen Aufgaben sind natürlich keine eigentlich konstruktiven Aufgaben, sondern greifen über in das Gebiet der algebraischen Geometrie.

erhält also:

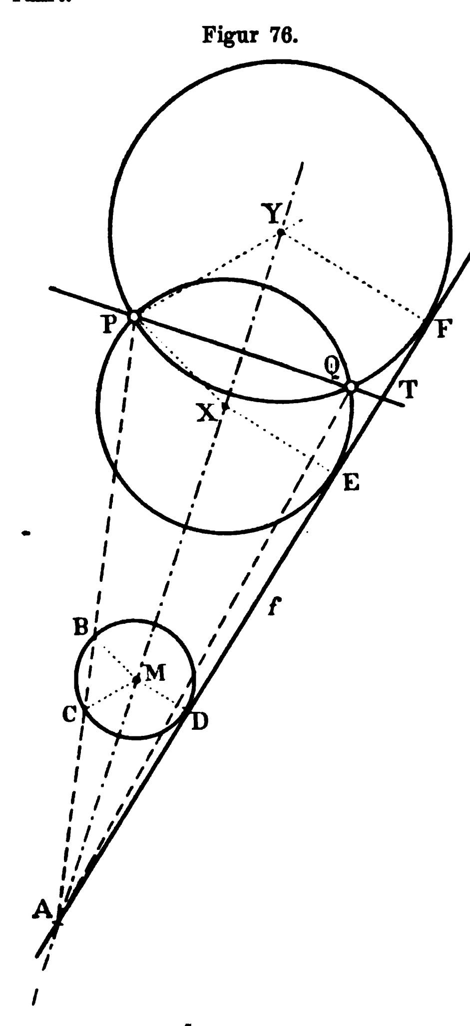
$$a' : a = \sqrt[4]{e} : \sqrt[4]{E},$$

$$a = a' \cdot \sqrt[4]{\frac{E}{e}}.$$

Mit dieser Seite a konstruiert man dann ein ähnliches Viereck, und erhält damit das verlangte.

Aufgabe 175. Man soll einen Kreis konstruieren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Figur 76.



Auflösung. Seien P und Q die gegebenen Punkte, f die gegebene Tangente, so zeichne man zunächst die Mittelsenkrechte von PQ und sodann einen beliebigen Kreis, dessen Mittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten liegt und der die Gerade f berührt. Wählt man dann den Schnittpunkt A der Mittelsenkrechten und der Tangente als Aehnlichkeitspunkt, so werden AP und AQ Aehnlichkeitsstrahlen, und die erstere Linie trifft den Kreis um M in B oder C. Ordnet man nun zu P erst den Punkt B als entsprechenden zu, dann den Punkt C, so entsteht zum Radius BM der entsprechende parallele Strahl PX, zu CM der entsprechende parallele Strahl PY. Daher ist wegen:

$$BM = CM = MD \perp f$$

sowohl:

$$PX = QX = XE \perp f,$$

als auch:

$$PY = QY = YF \perp f$$

Folglich sind X und Y die Mittelpunkte der Kreise, welche durch P und Q gehen und die Gerade f berühren.

Erkl. 393. Die vorstehende Aufgabe ist dieselbe, wie die in Antwort der Frage 73 des vorigen VI. Teiles gelöste. Dort wird man auf die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat zurückgeführt:

$$TP \cdot TQ = \overline{TE}^2 = \overline{TF}^2.$$

Hier geschieht die Lösung mittels der Aehnlichkeitsmethode, indem die Figur der drei Geraden BM, MD, f perspektivisch ähnlich liegt zu PX, XE, f bezw. CM, MD, f zu PY, YF, f.

Erkl. 394. Obgleich die vorstehende Aufgabe infolge der Anwendung der Aehnlichkeitsmethode auf die Kreislinie strenggenommen bereits zum Inhalte des folgenden VIII. Teiles dieses Lehrbuches gehört, wurde dieselbe doch an dieser Stelle aufgeführt, um die allgemeine Verwendbarkeit dieser Aehnlichkeitsmethode zu zeigen, da derselben im folgenden Teile eine selbständige Berücksichtigung nicht weiter zu teil werden kann.

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 176. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis $p:q:h$ und $a+b$.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 170.

Aufgabe 177. In ein Dreieck ein Quadrat einzuzeichnen, das zwei Ecken auf a und b, eine Seite auf c hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 171.

Aufgabe 178. Einem gegebenen Rhombus ein ebensolches mit gegebenen Winkeln einzuschreiben.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 172.

Aufgabe 179. Ein gegebenes Quadrat in ein inhaltsgleiches regelmässiges Sechseck zu verwandeln.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 173.

Aufgabe 180. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen mit Winkeln von 30^0, 60^0, 90^0, in welchem das Produkt der Radien der drei Ankreise $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c$ gegebenen Wert hat.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 174.

Aufgabe 181. Einen Kreis zu zeichnen, der durch gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Tangenten berührt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 175.

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben.

6. Tapetenmuster gleicher Art in verschiedenen Grössen; gleichartige Pressungen auf Bucheinbänden; eine Zeichnung und ihr durch ein Vergrösserungsglas oder Verkleinerungsglas gesehenes Bild; ein Gegenstand und sein im Vergrösserungs- oder Verkleinerungsspiegel gesehenes Gegenbild (letztere beiden Fälle allerdings unter Ausschluss der Ränder der Bilder).

7. Eine menschliche Figur, deren Statue und das Modell zu letzterer; überhaupt Modelle und deren thatsächliche Ausführungen; ein „Satz" ineinander gesteckter Büchsen oder Schalen u. s. w.; eine Landesgegend und eine genaue Reliefkarte derselben.

8. Aehnliche Gestalt bei ungleicher Grösse haben: Gegend und Karte, Stadt und Stadtplan.

Gleiche Grösse bei ungleicher Gestalt haben: Grossherzogtum Hessen und preuss. Regierungsbezirk Arnsberg (138 Quadratmeilen); die französischen Departements Indre und Morbihan (6 796 qkm); Vierwaldstädtersee und Müritzsee (113 qkm).

Gleiche Gestalt und Grösse haben: Zwei oder mehr nach identischem Plane gebaute Wohnhäuser oder Kirchen oder so angelegte Gärten u. s. w.

9. 1) Rhomben von verschiedenen Seiten, aber gleichen Winkeln; 2) Rhomben mit verschiedenen Winkeln, aber gleichem Inhalt; 3) Rhomben mit gleichen Seiten und Winkeln.

10. 1) $7:14:17\frac{1}{2}$, 2) $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$,

3) $\frac{2}{5}\sqrt{10}:\frac{4}{5}\sqrt{10}:\sqrt{10} = \sqrt{1{,}6} : \sqrt{6{,}4} : \sqrt{10}$.

11. 1) $s:\frac{s\cdot\tau}{\sigma}:\frac{s\cdot v}{\sigma}$, 2) $\frac{\sigma t}{\tau}:t:\frac{vt}{\tau}$,

3) $\frac{\sigma y}{v}:\frac{\tau y}{v}:y$.

12. 10 : 1) $\frac{7}{2}$, 2) $\frac{1}{6}$, 3) $\frac{\sqrt{10}}{5} = \sqrt{0{,}4}$;

11 : 1) $\frac{s}{\sigma}$, 2) $\frac{t}{\tau}$, 3) $\frac{y}{v}$.

13. Nein; denn:

$2+3<6,\quad 6-2>3,\quad 6-3>2.$

14. Man zeichnet eine beliebige Strecke der Fig. 3 dreifach (bezw. halbsogross), trägt beiderseits die kongruenten Winkel an, dann wird die nächste Seite dreifach (bezw. halbsogross) u. s. w.

15. Wenn der Gegenwinkel gleich 90^0 geworden, so wird der Bruch $\frac{a}{\sin\alpha}$ zwar auch noch kleiner mit zunehmendem $\sphericalangle\alpha$, aber nur dadurch, dass a rascher abnimmt als α.

---

31. Wird als Voraussetzung angesetzt:

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim A_3 B_3 C_3$$

und

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \cong A_2 B_2 C_2,$$

so wird der Beweis buchstäblich derselbe, wie jener in Auflösung der Aufgabe 16.

32. Liegt Punkt P ausserhalb des Dreiecks, aber doch im Innenraum eines der Dreieckswinkel, so erleidet Auflösung der Aufgabe 17 gar keine Aenderung; liegt P im Scheitelraum eines Dreieckswinkels, so muss für diesen Eckpunkt das neue ähnliche Dreieck im Scheitelwinkel des vorigen liegen, was im vorhergehenden Falle nur manchmal vorkommen konnte. Jedesmal aber hat man alle sechs Lösungen, wie in der Aufgabe 17, und auch die drei Paar hinzutretender ähnlichen Dreiecke.

Liegt aber P auf einer Dreiecksseite selbst, so geht die Parallele zu dieser Seite verloren, nicht aber irgend eine der Antiparallelen samt deren Ergebnissen; man hat also dann nur noch fünf Lösungen, und die sämtlichen neuen Dreiecke stossen an diesem gemeinsamen Punkte zusammen. Selbst wenn Punkt P in einen Eckpunkt des Dreiecks selbst einrückt, bleiben noch zwei Lösungen der Aufgabe übrig, gebildet durch zwei Antiparallelen durch diesen Eckpunkt, welche mit der Gegenseite ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

33. Die Angabe des Umfangs eines Dreiecks liefert auf den Schenkeln eines der Dreieckswinkel die Berührungspunkte des

Ankreises der Gegenseite (siehe Satz 24 des IV. Teiles dieses Lehrbuches); man erhält also diesen Ankreis selbst und zieht an denselben eine Tangente, welche der ursprünglichen Seite parallel oder antiparallel ist.

34. Da:

$$r = \frac{abc}{4F}, \quad \varrho_0 = \frac{F}{s}, \quad \varrho_a = \frac{F}{s-a},$$

$$\varrho_b = \frac{F}{s-b}, \quad \varrho_c = \frac{F}{s-c},$$

worin:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$ so

entsteht unmittelbar durch Ersetzung von $a = x \cdot a'$ u. s. w.

$$r = x \cdot r', \qquad \varrho = x \cdot \varrho'$$

oder:

$$r : r' = \varrho : \varrho' = \cdots = a : a' = \cdots$$

35. Wird Winkel α in Figur 43 beibehalten und β vergrössert über $90 - \frac{\alpha}{2}$ hinaus, so rückt Punkt F über A hinaus, Punkt A liegt auf der Strecke FG; wird $\beta = 90^0$, so wird FG unendlich und zwar in den beiden einander ähnlichen Dreiecken ABC und $A'B'C'$. Wird β stumpf, so fällt Punkt B ins Innere der Strecke FG. Wird β stumpf und a u s s e r d e m:

$$\alpha > 90^0 - \frac{\beta}{2},$$

so liegt FG ganz ausserhalb der Seite AB jenseits B (z. B. $\beta = 120^0$, $\alpha > 30^0$).

36. Ist in Figur 43:

$$OF = x \cdot O'F', \qquad FG = x \cdot F'G',$$
$$GO = x \cdot G'O',$$

so ist auch:

$$OF + FG + GO$$
$$= xO'F' + xF'G' + xG'O'$$
$$= x(O'F' + F'G' + G'O'),$$

also auch:

$$(OF + FG + GO) : (O'F' + F'G' + G'O')$$
$$= a : a' = x.$$

37. Ein Beispiel eines andern Aehnlichkeitssatzes (anschliessend an Aufgabe 21) wäre das folgende: D r e i e c k e s i n d ä h n l i c h, wenn sie übereinstimmen in einem Winkel und im Verhältnis der dazu gehörigen Winkelhalbierenden zu einer anstossenden Seite.

38. Ist von einem Dreieck gegeben der Winkel α, das Verhältnis $m : c$ und eine Höhe, so wählt man beliebige Grundseite c', legt Winkel α an und beschreibt um den Mittelpunkt von c' einen Bogen mit solcher Länge m', deren Verhältnis zur angenommenen Strecke c' das verlangte ist. Im so entstehenden Dreieck zieht man die entsprechende Höhe, verlängert oder verkürzt sie auf die verlangte Grösse und zieht durch den neuen Endpunkt die Parallele zu c'.

39. Bei Vergrösserung oder Verkleinerung der L ä n g e im Verhältnis:

$$\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2} \cdots$$

wird die F l ä c h e vergrössert oder verkleinert im Verhältnis:

$$\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \cdots,$$

umgekehrt die L ä n g e im Verhältnis:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

40. Bei j e d e m rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel einer Halbierungslinie mit der anliegenden Kathete gleichgross, ebenso der mit der Hypotenuse oder der Gegenkathete oder mit der andern Mittellinie, nämlich nach trigonometrischer Berechnung ersterer:

$$26^0\, 33'\, 54{,}2'',$$

die anderen der Reihe nach:

$$18^0\, 26'\, 5{,}8''; \quad 63^0\, 26'\, 5{,}8''$$

bezw.:

$$116^0\, 33'\, 54{,}2''; \quad 36^0\, 52'\, 11{,}6''$$

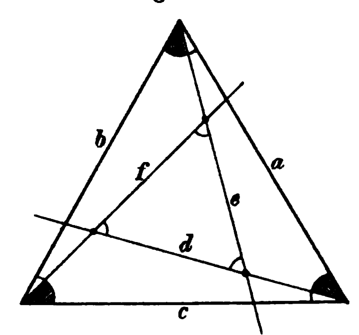
bezw.:

$$143^0\, 7'\, 48{,}4''.$$

41. Dreiecke sind n i c h t notwendig ähnlich, wenn in ihnen ähnliche Teildreiecke gebildet werden durch:
zwei Seiten und die Höhe auf einer derselben oder
eine Seite, die zugehörige Höhe und irgend ein drittes Stück;
wohl aber, wenn ähnliche Teildreiecke gebildet werden durch:
zwei Seiten und eine n i c h t zugehörige Winkelhalbierende,
eine Seite, eine n i c h t zugehörige Höhe und irgend ein drittes Stück u. s. w.

42. Ein Beispiel für die allgemeine Form des Satzes 9 liefert Aufgabe 131 des III. Teiles dieses Lehrbuches, wo (siehe Figur 77) das Dreieck der Linien d, e, f

Figur 77.



ähnlich wird dem Dreieck abc, weil jede Seite des Dreiecks d, e, f mit der entsprechenden des Dreiecks abc denselben Winkel bildet.

43. Beispiele ähnlicher Dreiecke infolge Parallelität der Seiten liefern zahlreich die Figuren 288, 289, 293 des III. Teiles dieses Lehrbuches; für ähnliche Dreiecke infolge Perpendikularität (dies das ziemlich selten gebrauchte Substantiv zur Bezeichnung senkrechter Lage) etwa Fig. 87 des III. Teiles dieses Lehrbuches u. a.

44. Die Anzahl ähnlicher Dreieckspaare in Figur 46 bestimmt sich folgendermassen: 10 mit dem ursprünglichen Winkel α, 9 mit einem Winkel gleich α in andrer Lage, also zusammen 19 Dreiecke mit den Winkeln α, $90 - \alpha$, 90^0. Und unter 19 Dreiecken gibt es Paare:

$$\frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2} = 171.$$

45. Am einfachsten wird der Beweis des vierten Aehnlichkeitssatzes, da bei Gleichheit der Winkel die Parallelität der drei Seitenpaare sofort folgt, wenn ein Paar parallel gelegt ist. In allen anderen Fällen verfährt man indirekt wie in Erkl. 268, indem ein angenommenes Dreieck $A_2 B_2 C_2'$ mit dem vorhandenen Dreieck $A_2 B_2 C_2$ übereinstimmen muss.

46. Gleichlaufend ähnlich sind die Dreiecke, welche gebildet werden von einer gemeinsamen Tangente an zwei Kreise, der Zentrale und den beiden Radien; ungleichlaufend ähnlich die Dreiecke, welche von zwei Höhen im Dreieck gebildet werden mit je einer der beiden zugehörigen Dreiecksseiten, oder von je zwei Dreiecksseiten mit je einer der beiden zugehörigen Höhen.

---

60. Ist die gegebene Rechtecksseite grösser als die halbe Quadratseite, dann kann man die Quadratseite als Beweis nehmen; ist die Quadratseite grösser als die halbe Rechtecksseite, so nimmt man die Quadratseite als Schenkel und verfährt nach Erkl. 272. Für die Zwischengrössen:

$$\frac{c}{2} < a < 2c, \quad \frac{a}{2} < c < 2a$$

kann man nach beiden Konstruktionen verfahren.

61. Auch nach der Beziehung $a^2 = c \cdot e$ in Figur 50 lässt sich die Umwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat durchführen. Die Rechtecksseiten werden aufeinander gelegt (c auf e in Figur 50 I, e auf c in Figur 50 II), auf der kleineren (I) oder grösseren (II) eine Mittelsenkrechte errichtet und auf dieser der Punkt C gesucht, dessen Abstand vom Endpunkt gleich der andern Seite ($EC = e$ in I, $EC = e$ in II). Dann ist:

I.

$$\sphericalangle CAB = CBA = ACE,$$
$$\triangle ABC \sim ACE,$$
$$AB : AC = AC : AE,$$
$$AC^2 = AB \cdot AE, \quad a^2 = c \cdot e \, (c < e).$$

II.

$$\sphericalangle CAB = CBA = ACE,$$
$$\triangle ABC \sim ACE,$$
$$AB : AC = AC : AE,$$
$$AC^2 = AB \cdot AE, \quad a^2 = c \cdot e \, (c > e).$$

62. Um die Summe zweier Quadrate $a^2 + c^2$ als Summe zweier Rechtecke mit je einer beizubehaltenden Qudratseite darzustellen, zeichne man aus a und c ein gleichschenkliges Dreieck und vervollständige dies zur Figur 50, wo:

$$a^2 + c^2 = ad + ce.$$

63. Das Verhältnis zwischen Schenkel und Basis im gleichschenkligen Dreieck ist massgebend für die Grösse der Winkel.

$$c : a \lesseqgtr 1 \text{ liefert } \gamma \lesseqgtr 60^0 \lesseqgtr \alpha;$$

$$c : a \lesseqgtr \sqrt{2} \text{ liefert } \gamma \lesseqgtr 90 \text{ und } \alpha \gtrless 45^0;$$

$$c : a \lesseqgtr \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ liefert } \gamma \lesseqgtr 120^0, \; \alpha \gtrless 30^0$$

u. s. w.

64. Zahlenbeispiele zu Aufgabe 52 wären die folgenden: Ist gegeben im rechtwinkligen Dreieck:

$$a : b = 3 : 4,$$

so muss:

$$a : b : c = 3 : 4 : 5;$$

zu gegebenem:

$$a : c = 5 : 7$$

muss:

$$a : b : c = 5 : 2\sqrt{6} : 7;$$

zu gegebenem:

$$b : c = 6 : 11$$

muss:

$$a : b : c = \sqrt{85} : 6 : 11.$$

65. Von den sieben ähnlichen Dreiecken der Figur 52 sind unter sich gleichlaufend ähnlich:

$$ABC \sim BEC \sim AEC$$

(positiver Umlauf), dagegen unter sich gleich —, aber mit jedem der vorigen ungleichlaufend:

$$ACD \sim CBD \sim AEB \sim EBA$$

(negative Umlaufsrichtung bei gleicher Winkelfolge wie zuvor). Beim Umlauf vom kleinsten Winkel über den mittlern zum grössten hat man bei ersterem stets die Dreiecksfläche zur Linken, bei letzterem zur Rechten. Im ganzen hat man unter 7 ähnlichen Dreiecken 21 Paare, davon 12 ungleichlaufend ähnliche und $3 + 6 = 21 - 12 = 9$ Paare gleichlaufend ähnliche.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

1348. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie). 7. Teil.
Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.
Forts. v. Heft 1347. — S. 161–165 u. I–VIII. Mit 1 Figur. (Schlussheft des VII. Teils.)





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Elementar-Geometrie (Planimetrie).

Siebenter Teil.

Die Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Nach System Kleyer bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.**

Fortsetzung von Heft 1347. — Seite 161—165 u. I—VIII. Mit 1 Figur.

(Schlussheft des VII. Teils.)

Inhalt:

Ergebnisse der ungelösten Aufgaben. — Titelblätter. — Vorwort. — Inhaltsverzeichnis.

Stuttgart 1894.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln **angeordnet** — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

66. Um die sämtlichen Strecken in Figur 52 in ganzen Zahlen auszudrücken, wählt man für die Seiten des Dreiecks ABC solche Werte eines pythagoreischen Dreiecks, dass auch h und r ganze Zahlen liefern. Also etwa mittels des Verhältnisses 3 : 4 : 5:

$$\begin{aligned} a &= 3x = 5\mu = \;= 4\sigma,\; r - b = 3\sigma \\ b &= 4x = 5\lambda \;= 3v,\; k' = 5v,\; r' = 4v \\ c &= 5x = 4\nu \;= 3\tau,\; k' = 4\tau,\; a + r' = 5\tau \\ h &= \frac{12}{5}x = 3\lambda = 4\mu \\ p &= 3\mu \\ q &= 4\lambda \\ k &= 3\nu = 5\sigma \\ r &= 5\nu \end{aligned}$$

$x = 60$, $\lambda = 48$, $\mu = 36$, $\nu = 75$, $\sigma = 45$, $\tau = 100$, $v = 80$

Dadurch wird:

$a = 180$	$p = 108$	$h = 144$	$r - b = 135$	$b = 240$	$k = 225$	$c = 300$
$b = 240$	$h = 144$	$q = 192$	$a = 180$	$r' = 320$	$c = 300$	$k' = 400$
$c = 300$	$a = 180$	$b = 240$	$k = 225$	$k' = 400$	$r = 375$	$a + r' = 500$

67. Als Bestätigung der in Antwort der Frage 31 aufgestellten Beziehungen erhält man:

1) $a^2 = c \cdot p = 32400 = b(r - b) = h \cdot k$,
2) $b^2 = c \cdot q = 57600 = h \cdot k'$,
3) $h^2 = p \cdot q = 20736$,
5) $c^2 = b \cdot r = 90000$,
6) $k^2 = r(r - b) = 50625$,
8) $a \cdot b = c \cdot h = 43200 = q \cdot k$,
9) $a \cdot q = b \cdot h = 34560$,
10) $a \cdot h = b \cdot p = 25920 = q(r - b)$,
11) $a \cdot c = b \cdot k = 54000 = h \cdot r$,
12) $a \cdot r = c \cdot k = 67500$,
19) $a \cdot k = p \cdot r = 40500 = c(r - b)$,
23) $a \cdot p = h(r - b) = 19440$,
24) $a(r - b) = p \cdot k = 24300$,
16) $b \cdot c = q \cdot r = 72000$
22) $h \cdot k = b(r - b)$ $= 32400$

u. s. w.

68. Man kann verfahren nach jeder der Lösungen in Aufgabe 54 oder 55 und wiederholt dasselbe mehrfach mit gleicher Quadratseite, aber verschieden grossen Rechteckseiten.

69. Um das Verhältnis zweier Strecken als Verhältnis von Flächen darzustellen, wählt man die Strecken als Hypotenusenabschnitte p und q und zeichnet ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Dann ist jedesmal $a^2 : b^2 = p : q$.

70. Statt m mit $\frac{x^2}{y^2}$ zu multiplizieren, verwandelt man nach Aufgabe 56 $\frac{x^2}{y^2}$ in $\frac{p}{q}$ und bildet $m \cdot \frac{p}{q}$.

71. Statt m mit $\sqrt{\frac{x}{y}}$ zu multiplizieren, verwandelt man nach Aufgabe 69 $\frac{x}{y}$ in $\frac{a^2}{b^2}$, also $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b}$, und bildet $m \cdot \frac{a}{b}$.

72. Um $\sqrt{z}$ zu konstruieren, wählt man z als p, macht $q = 1$ und vervollständigt das rechtwinklige Dreieck. Dann wird:

$$z : 1 = a^2 : b^2,$$

also:

$$\sqrt{z} = \frac{a}{b}.$$

Dabei kann man b so wählen, dass bequeme Division entsteht, z. B.:

$$b = 2, 3, \cdots$$

73. Man wähle als Quadratseite die ganze bezw. die halbe Diagonale des ersteren.

74. Da Seite zur Höhe wie:

$$a : \frac{a}{2}\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3},$$

so verhalten sich die Flächen wie 4 : 3.

---

97. Ist das Verhältnis der Diagonalen gegeben, so zeichnet man durch Punkt C die Parallele CE zur andern Diagonale, dann entsteht dort $\sphericalangle BCE = DBC$, und man kann im Dreieck ACE die Winkel CAB, CBD u. s. w. mit dem Verhältnis der Diagonalen zusammenfassen.

98. Ist der Umfang eines Teildreiecks gegeben, so konstruiert man dieses vorläufig aus den gegebenen Winkeln oder Verhältnissen und sucht dann die Verhältnisgrösse x, um die endgültigen Längen zu erhalten.

99. Sehnenvielecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

im Verhältnis von:	und dazu in der Grösse von:
n Seiten.	$n - 4$ Winkeln.
$n - 1$ „	$n - 3$ „
$n - 2$ „	$n - 2$ „

100. Tangentenvielecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

im Verhältnis von:	und dazu in der Grösse von:
$n-1$ Seiten.	$n-3$ Winkeln.
$n-2$ "	$n-2$ "
$n-3$ "	$n-1$ "

101. Kreisvielecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

im Verhältnis von:	und dazu in der Grösse von:
$n-1$ Seiten.	$n-4$ Winkeln.
$n-2$ "	$n-3$ "
$n-3$ "	$n-2$ "

102. Sind ähnliche Vielecke in perspektivischer Lage, so kann man zu einem beliebigen Punkt P_2 den entsprechenden P_1 finden, indem man etwa P_2 mit A_2 verbindet, den $\sphericalangle B_2A_2P_2$ als $\sphericalangle B_1A_1P_1$ anträgt und darauf A_2P_2 konstruiert nach der Proportion:

$$A_2P_2 : A_1P_1 = A_2B_2 : A_1B_1,$$

oder auch den Schenkel A_1P_1 durch den Aehnlichkeitsstrahl SP_2 schneidet.

103. Soll statt A_2 der Punkt A_1 erst zu $(ABC)_2$, dann zu $(ABC)_1$ gerechnet werden, so ergibt sich die Reihenfolge der Punkte A_2, A_1, Z so, dass $SA_1^2 = SA_2 \cdot SZ$, dass also zu A_2 als Punkt von $(ABC)_2$ der Punkt A_1 in $(ABC)_1$ gehört; aber zu A_1 als Punkt von $(ABC)_2$ der Punkt Z in $(ABC)_1$.

104. Soll ein bestimmter Punkt S zum äussern (oder innern) Aehnlichkeitspunkt werden, so zieht man von S nach den Aehnlichkeitspunkten von $(ABC)_1$ die Aehnlichkeitsstrahlen und legt in den Winkel (oder in den Scheitelwinkel) irgend zweier die entsprechende Strecke der andern Figur in paralleler Lage ein.

105. Um ein Quadrat mit einem gegebenen andern Quadrat in perspektivische Lage zu bringen, dreht man entweder das eine um den Winkel zweier Seiten oder man klappt dasselbe um um eine Parallele zur Winkelhalbierenden zweier Seiten. Man hat also, da alle vier Seiten gleichwertig sind, jedesmal viererlei Auswahl und dazu noch je die doppelte Möglichkeit eines äussern oder innern Aehnlichkeitspunktes.

106. Um ein rechtwinkliges Dreieck in perspektivische Lage zu bringen mit einem der durch die Höhe gebildeten Teildreiecke, klappt man dasselbe um, indem man als Achse wählt die Winkelhalbierenden des mit diesem Teildreieck gemeinsamen spitzen Winkels oder eine Parallele dazu. (In ersterm Falle wird der Scheitel dieses Winkels selbst Aehnlichkeitspunkt nach Art der Figur 15.)

107. Sind zwei Antiparallelogramme oder Deltoide ähnlich in perspektivischer Lage mit äusserem (oder innerem) Aehnlichkeitspunkt, so entsteht durch Umklappung um die Symmetrieachse oder eine Parallele ein anderer äusserer (oder innerer); durch Umklappung um eine Senkrechte zur Achse oder durch Umdrehung dagegen ein anderer innerer (oder äusserer) Aehnlichkeitspunkt. Jede andere Lagenveränderung hebt die perspektivische Lage ganz auf. Diese bestand aber nur für $(ABCDE)_1 \backsim (ABCDEA)_2$, nicht für:

$$(ABCDE)_1 \backsim (BADCB)_2.$$

108. Die Ergebnisse der Auflösung der Aufgabe 85 verteilen sich auf Rechteck und Rhombus:

1) nur Rechteck,
2) nur Rhombus,
3) weder Rechteck noch Rhombus, sondern beide bloss für Umdrehungen um 180°.

109. Eine Karte im Massstab von 1 : 500000 gibt ein Land von 15000 qkm durch 15000 : 250000000000 = 0,00000006 qkm = 6 qdm beim Massstab von 1 : 1000000 durch:
15000 : 1000000000000 = 0,000000015 qkm = 1,5 qdm (Viertel des Vorigen, weil Hälfte des Massstabes).

110. Auf einem Blatt von 15 cm Breite und 24 cm Höhe kann im Massstabe von 1 : 25000 eine Fläche von:

$$15 \cdot 24 \cdot 25000^2 \text{ qcm}$$

dargestellt werden:

$$= 225000000000 \text{ qcm} = 22\frac{1}{2} \text{ qkm},$$

nämlich 3,75 km Breite und 6 km Länge.

111. Die wahren Grössen von Strecken, die auf verschiedenen Karten gleichlang dargestellt sind, verhalten sich umgekehrt wie die Massstäbe, jene der Flächen entsprechend, wie deren Quadrate.

112. Angewendet auf die Höhendreiecke des rechtwinkligen Dreiecks liefert Satz 18:

$$ABC \backsim CBD \backsim ACD.$$

Homologe Stücke (jedesmal Hypotenuse) sind AB, CB, AC, also:

$$ABC = CBD + ACD.$$

113. Um die Summe oder Differenz zweier ähnlichen Figuren in Gestalt einer den beiden wieder ähnlichen Figur darzustellen, konstruiert man das rechtwinklige Dreieck aus zwei homologen Stücken der beiden ersten und zeichnet die ähnliche Figur über der entstehenden dritten Seite des Dreiecks.

114. Zur sicheren Bestimmung der auf der Aehnlichkeitsachse entstehenden Strecken zwischen S_{123} und D_{123} nach Lage und Grösse sind nötige Angaben:

1) die Verhältnisse der Längen in $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ und

2) die wirklichen Längen in einer dieser Figuren und

3) die Verhältnisse der Abstände entsprechender Punkte der Figuren $(ABC)_{123}$ von einander und

4) die wirkliche Länge des einen dieser drei Abstände, also im ganzen fünf willkürliche Längengrössen.

115. Zur Bestimmung der sechs Aehnlichkeitspunkte könnte man auch die drei Strecken $M_1 M_2 M_3$ zeichnen und jede innen und aussen teilen im Verhältnis der zugehörigen Strecken:

$$AC_1 : AC_2, \quad AC_2 : AC_3, \quad AC_3 : AC_1.$$

116. Aus Satz 19 des VI. Teiles dieses Lehrbuches folgt für Figur 58, dass auch die Mittelpunkte der drei Geraden $S_1 J_1$, $S_2 J_2$, $S_3 J_3$ auf einer geraden Linie liegen müssen.

117. Um zwei gleichwendig ähnliche Figuren aus schiefer Lage mit Beibehaltung des Aehnlichkeitspunktes in perspektivische Lage zu bringen, sucht man nach Aufgabe 92 den Aehnlichkeitspunkt und dreht um diesen, bis SA_2 (Fig. 59) für gleichlaufend perspektivische Lage auf SA_1, für ungleichlaufend perspektivische Lage auf die Verlängerung von SA_1 zu liegen kommt.

118. Soll ein Punkt P erst betrachtet werden als P_1, dann als Q_2 und jeweils der entsprechende Punkt im gleichwendig ähnlichen System gesucht werden, so verbindet man P_1 mit A_1, trägt den Winkel $B_1 A_1 P_1$ in A_2 als Winkel $B_2 A_2 P_2$ in gleichem Drehungssinn an und misst auf dem freien Schenkel die Strecke $A_2 S_2$ so, dass:

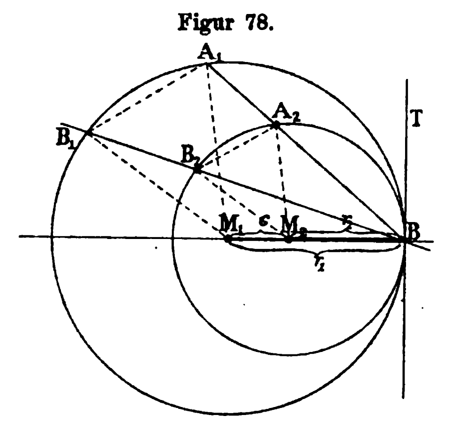
$$P_1 A_1 : P_2 A_2 = A_1 B_1 : A_2 B_2.$$

Sodann verbindet man Q_2 mit A_2 und verfährt ebenso mit Winkel $B_1 A_1 Q_1$ und dem Schenkel $A_1 Q_1$.

119. Soll zu dem Punkt P jeweils der entsprechende Punkt in ungleichwendig ähnlichen Systemen gesucht werden, so verfährt man entweder genau wie zuvor, nur mit Antragung des Winkels in entgegengesetztem Drehungssinne; oder man verbindet P_1 mit A_1 und B_1 und trägt diese Winkel $P_1 A_1 B_1$ und $P_1 B_1 A_1$ beide in umgekehrtem Drehungssinne an als $A_2 B_2 P_2$ und $B_2 A_2 P_2$. Der Schnittpunkt ist dann der gesuchte.

120. Wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte ($A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$) in Fig. 78 einander parallel sind, so berühren einander die Kreise $A_1 B_1 B$ und $A_2 B_2 B$ in B, und B wird selbst Aehnlichkeitspunkt der durch $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ bestimmten Systeme (siehe Figur 78).

Figur 78.



121. Soll ein vorgegebener Punkt P äusserer (oder innerer) Aehnlichkeitspunkt werden, so teilt man PA_1 innen (oder aussen) so, dass:

$$PA_1 : XA_1 = A_1 B_1 : A_2 B_2,$$

zieht:

$$XY \parallel A_1 B_1 \text{ und } XY = A_2 B_2$$

und dreht um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $A_2 X$ und $B_2 Y$.

122. Um ungleichwendig ähnliche Systeme in perspektivische Lage zu bringen, braucht man mehr als eine Operation, nämlich Umklappung und Verschiebung oder Drehung und Umklappung.

---

134. Ist $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{n}$, so ist auch:

$$\frac{BD}{DC} = n \cdot \frac{AE}{EC},$$

also erhält das Teilungsverhältnis der einen Seite den $n$fachen Wert vom Teilungsverhältnis der andern, und zwar wieder das eine mit innerer, das andere mit äusserer Teilung.

135. Wird hierin auch $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{n}$, so muss $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{1}$. Also fällt D ins Unendliche oder in den Mittelpunkt, wenn E aussen oder innen, und ebenso umgekehrt.

136. Ist $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{n}$, so ist auch:

$$\frac{BD}{DC} = n \cdot \frac{AE}{EC},$$

also erhält wieder das Teilungsverhältnis der einen Seite den $n$fachen Wert vom Teilungsverhältnis des andern, und zwar wieder beide mit innerer oder beide mit äusserer Teilung.

137. Die Linie nach einem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden wird Schwerlinie, wenn man die Seite durch Parallele

teilt, und die Schnittpunkte der kreuzweisen Verbindungslinien der Teilpunkte verbindet (vergl. Aufgabe 206 und 264 des VI. Teiles dieses Lehrbuches).

138. Der verlangte geometrische Ort ist die Gerade durch die Teilpunkte X und Y der Seiten a und b, für welche:

$$BC:AY = BX:AC = m:n.$$

139. Der Wert des Produktes nach Menelaos für $m:n = 3:4$, $r:s = 2:3$ wird:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}\,abc = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}\,abc = \frac{12}{35}\,abc.$$

140. Aufgabe 124 wird bestätigt durch die Berechnung der Erkl. 354, indem sowohl für $v = +1$, als für $v = -1$ der Wert des Produktes ∞ wird.

---

154. Wird in Figur 66 $DE = EF = n$, so wird $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 2n^2$, $\frac{c}{2} = n\sqrt{2}$. Allgemein für $FD = m\cdot DE = m\cdot n$ wird:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = m\cdot n^2,\quad \frac{c}{2} = n\sqrt{m}.$$

155. Der Wert des Menelaosschen Produktes für die Linie DEF in Figur 67 ist:

$$\frac{p_a a}{p_a - q_a}\cdot\frac{p_b b}{p_b - q_b}\cdot\frac{p_c c}{p_c - q_c} = \frac{abc\cdot a^2b^2c^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\cdot p_a p_b p_c$$
$$= \frac{a^2b^2c^2(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}.$$

156. Der Wert des Cevaschen Produktes für die Punkte P_1, P_2, P_3 in Figur 66 ist z. B. für P_1:

$$p_a\cdot\frac{p_c\cdot c}{p_c - q_c}\cdot\frac{p_b\cdot b}{p_b - q_b} = \frac{c^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2-a^2}\cdot p_a\cdot p_b\cdot p_c$$
$$= \frac{bc(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a(a^2-b^2)(c^2-a^2)}.$$

157. Wird statt der Schwerlinie eine andere Linie gewählt, so liefern die Ecktransversalen solche Verbindungslinien, welche sämtliche durch einen Punkt der Grundseite gehen.

158. Um eine beliebige Strecke in n gleiche Teile zu teilen, konstruiert man ein Dreieck aus dieser Strecke und zwei anderen, deren eine von 2, deren andere von n gleichen Teilen zuvor gebildet wird. Dann zieht man nach ersterer die Schwerlinie, nach letzterer sämtliche Ecktransversalen; dann schneiden die Ecktransversalen nach den Schnittpunkten mit der Schwerlinie die verlangten Teile aus.

159. Man kann den Satz aussprechen: Trägt man die von einer Geraden gebildeten Abschnitte der Seiten eines Dreiecks je auf derselben Dreiecksseite vom andern Eckpunkte in entgegengesetzter Richtung an, so liegen auch die neuen drei Teilpunkte auf einer Geraden.

160. Man kann den Satz aussprechen: Trägt man die von der Ecktransversalen eines Punktes gebildeten Abschnitte der Seiten eines Dreiecks je auf derselben Dreiecksseite vom andern Eckpunkte in entgegengesetzter Richtung an, so gehen auch die Ecktransversalen der neuen Teilpunkte durch einen Punkt.

161. Die drei Verbindungslinien des Mittelpunktes des Inkreises mit den drei Seitenmitten sind parallel den drei Ecktransversalen der inneren Berührungspunkte der Ankreise.

162. Die Ecktransversalen der Berührungspunkte der Ankreise schneiden sich mit den Berührungsradien des Inkreises auf der Peripherie des Inkreises (X) und zwar so, dass immer der obere Abschnitt der Transversalen vom Eckpunkt bis zum Schnittpunkt mit dem Inkreis ebenso lang ist, als der untere Abschnitt vom Berührungspunkt des Ankreises bis zum Schnittpunkt der drei Transversalen:

$$CX = F_3 Q.$$

163. In Worten lautet der Satz 2 der Auflösung der Aufgabe 149 folgendermassen: In jedem Dreieck liegen auf einer Geraden der Mittelpunkt des Inkreises mit dem Schwerpunkt und dem Schnittpunkte der Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise.

164. Die Verbindungslinien der Seitenmitten mit den Mittelpunkten der oberen Abschnitte auf den Transversalen nach H oder nach Q gehen zwar beiderlei je durch einen Punkt N oder Q als gemeinsamen Halbierungspunkt; aber die ersteren sind auch unter sich gleichlang, so dass ihre sechs Endpunkte auf einem Kreise liegen, während die letzteren ungleich lang sind.

165. In jedem Dreieck liegen auf einer Geraden durch den Schwerpunkt S (als Teilpunkt ihrer Verbindungsstrecke mit Verhältnis 2 : 1) die Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten und die Schnittpunkte des Dreiecks der Seitenmitten mit den Transversalen nach den Berührungspunkten der Ankreise.

166. Da $R'T \parallel AH$ und dessen Schnittpunkt mit AQ die Mitte von AD_1 ist, so trifft

TR' die Seite *CB* im Mittelpunkt zwischen dem Berührungspunkt des Ankreises D_1 und dem Fusspunkt von *AH*.

167. Da $JM_0 \parallel AQ$ und *R'* Mitte von QD_0, so trifft JM_0 die dritte Seite AD_0 des Dreiecks AQD_0 im Mittelpunkt (Satz von Gergonne).

168. Auch beim allgemeinen Viereck kann Punkt *P* ins Unendliche rücken, wenn man z. B. die Mittelpunkte der Seiten als Teilpunkte wählt; dann fallen *P* und *P'* ins Unendliche, die Transversalen werden den beiden Diagonalen parallel.

169. Legt man durch einen Punkt *O* einer Vierecksdiagonale eine Transversale *PQR*, verbindet deren Schnittpunkt *Q* und *R* mit einem Punkt *P'* der andern Diagonale, so liegen die Schnittpunkte der neuen Transversalen mit den Gegenseiten auf einer geraden Linie mit dem ursprünglichen Punkte *P*.

---

176. Durch $p:q:h$ sind die Winkel bestimmt, $(a' + b'):(a + b) = a':a$ liefert a.

177. Ein beliebiges Quadrat mit Seite auf *c*, Ecke auf *b* liefert die Diagonale von *A* aus, welche *a* im gesuchten Eckpunkte trifft.

178. Man konstruiert erst um ein Rhombus mit den verlangten Winkeln ein solches mit den Winkeln des gegebenen Rhombus und bringt beide Figuren in perspektivische Lage.

179. Man zeichne erst ein beliebiges regelmässiges Sechseck mit Seite a', und verwandle dasselbe in ein Quadrat mit Seite s'; dann liefert $s':s = a':a$ die gesuchte Seite a.

180. In beliebigem Dreieck mit Seite a' bestimme $\varrho_a' \cdot \varrho_b' \varrho_c'$, dann muss:

$$a:a' = \sqrt[3]{\frac{P}{\varrho_a' \cdot \varrho_b' \cdot \varrho_c}} = x \text{ sein.}$$

181. Entweder auf Aufgabe 175 zurückzuführen, wie in Antwort der Frage 73 des VI. Teiles; oder unmittelbar durch Annahme eines beliebigen Kreises im Winkel der beiden Tangenten, und dann mittels Aehnlichkeitsstrahl *AP* durch den Aehnlichkeitspunkt A_1, den Schnittpunkt der Tangenten.



Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Von Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen u. exakten Natur-Wissenschaften sind nachstehende Bände vollständig erschienen:

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen. Mit 71 Erklärungen und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von A. Frömter. Preis: M. 3. —.

do. do. Zweites Buch: Das Rechnen mit benannten Zahlen. Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Frömter und Neubüser. Preis: M. 3. —.

do. do. Drittes Buch: Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.) Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von J. G. Maier. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen. Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer Münz-, Mass- und Gewichtstabelle. Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Richard Olbricht. Preis: M. 4.50.

do. do. Zweiter Teil: Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente. Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. Preis: M. 6. —.

do. do. Dritter Teil: Die Gold-, Silber-, Münz-, Effekten- und Wechselrechnung, sowie die Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. R. Olbricht. — Befindet sich unter der Presse. —

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen** mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von Hans Staudacher, Prof. an der kgl. Industrieschule zu Nürnberg. Erster Teil. Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: Elemente der Zahlenlehre, Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen. Mit einer Sammlung v. 277 gelöst. u. analogen ungelöst. Aufg., nebst d. Resultaten d. letzteren. Bearb. n. System Kleyer v. Prof. Hans Staudacher. Preis: M. 5. —.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4. —.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von Ad. Kleyer. Preis: gebunden M. 2. 50.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 4. —.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Otto Prange. Preis: M. 7. —

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten. (Quadrat. Gleichungen.) Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach System Kleyer von Dr. Aug. Blind. Preis: M. 10. —.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von Prof. Conrad Metger. Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des Bachez de Méziriac, im französischen Originale mit beigefügter deutscher Uebersetzung. Bearbeitet zum Teil nach System Kleyer von W. Fr. Schüler. Erstes Buch. Preis: M. 4.50.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von Richard Klimpert. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: M. 3. —.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von Ad. Kleyer. Preis: M. 1. 80.

Verlag von Julius Maier in Stuttgart.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Fachs, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte etc. Von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 10. —.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. H. Seipp.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch. Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 in den Text gedruckten Figuren. **Zweite Auflage.** Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 4. —

do. do. Zweites Buch. Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 9. —.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil. Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **Sytsem Kleyer von Dr. G. Weichold.** Preis: M. 10. —.

do. do. Zweiter Teil. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. G. Weichold.** ☛ Befindet sich unter der Presse. ☚

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer von Richard Krüger.** Preis: M. 5. —

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation expliziter Funktionen von einer unabhängigen Variablen. Ohne Anwendung der Grenzen- und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: M. 5. —.

do. do. Zweiter Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwicklungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren und 230 Erklärungen. Bearbeitet nach dem **System Kleyer von Prof. Dr. Haas.** Preis: M. 8. —.

do. do. Dritter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 138 Erklärungen und 164 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer von Prof. Dr. Haas.** Preis M. 7. —.

do. do. Vierter Teil: Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen. Bearbeitet nach **System Kleyer von Prof. Dr. Haas.** ☛ Befindet sich in Bearbeitung. ☚

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil. Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung von **Adolph Kleyer.** Preis: M. 10. —.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: M. 1. 50.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Uebungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren nach **System Kleyer** für den Unterricht und zum Selbststudium bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: M 6. —.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 308 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der sphärisch. und theoret. Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Mit 328 Erklärungen, Formelverzeichnis, 148 in den Text gedruckten Figuren und 2 Tafeln. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. W. Láska.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Richard Klimpert.** Preis: M. 8. —.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 352 Fragen, 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Dr. H. Hovestadt.** Preis: M. 6. —.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik). Mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Richard Klimpert.** Preis: M. 9. —.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik). Mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von R. Klimpert.** Preis: M. 13. 50.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer von Richard Klimpert.** Preis: M. 3. —.

Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit. Mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer von Richard Klimpert.** Preis: M. 5. 50.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

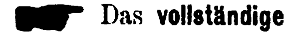
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich**, **ohne jede Bedeutung** für die Interessenten

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium**, **das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

